DIE FOURIERTRANSFORMATION

FRANZ GMEINEDER

Abstract. Dies ist eine ausgearbeitete und erweiterte Fassung der Januarsvorlesungen zur Analysis 3 an der Universität Bonn. Die Nummerierung weicht leicht von derjenigen in den Vorlesungen ab. Prüfungsrelevant ist allein der in den Vorlesungen besprochene Stoff. Für Anmerkungen und Hinweise auf Typos/Fehler bin ich dankbar.

1. Die Fouriertransformation

In diesem letzten Kapitel studieren wir die Fouriertransformation. Wir führen diese zunächst auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ein und stellen fest, dass $\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ abbildet. Allerdings ist diese Abbildung *nicht* bijektiv – eine Eigenschaft, die gerade für spätere Anwendungen wünschenswert ist. Dies greifen wir zuerst auf.

Wie wir bereits im Rahmen der Fourierentwicklung für 2π-periodische Funktionen gesehen hatten, lässt sich jede Funktion $f \in \mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$ darstellen als

$$v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle v, e_k\rangle_{\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))} e_k, \tag{1.1}$$

wobei $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathrm{i}\, k\cdot x}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))}$ das Skalarprodukt auf $\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$ ist. Dies ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung einer Aussage aus der linearen Algebra auf den Hilbertraum $\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$. Nämlich wissen wir, dass falls $(\widetilde{e}_k)_{k=1}^n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^d$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, so können wir jedes $v \in \mathbb{C}^n$ schreiben als

$$v = \sum_{k=1}^n \langle v, \widetilde{e}_k\rangle \widetilde{e}_k.$$

In diesem Sinne ist (1.1) die geeignete Verallgemeinerung auf den unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$, und die Konvergenz der Summe in (1.1) ist in $\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$ zu verstehen. Formel (1.1) sagt uns dann, wie sich v aus den einzelnen e_k's und den Skalarprodukten $\langle v, e_k\rangle_{\mathrm{L}^2}$ zurückgewonnen werden kann. Dies wollen wir insbesondere auch für die unten eingeführte *kontinuierliche Fouriertransformation* auf dem $\mathbb{R}^d$ erreichen. Allerdings ist es natürlich, die kontinuierliche Fouriertransformation auf dem $\mathbb{R}^d$ zuerst auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ einzuführen – wie wir leicht aus der Definition sehen werden. Jedoch ist $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *kein* Hilbertraum, und so werden wir die Frage der Fourierinversion auf dem Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ erst gegen Ende adressieren.

1.1. Die Fouriertransformation auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Wir definieren zuerst für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ die *Fouriertransformation*

$$\mathscr{F}f(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Daneben verwenden wir auch die Notation $\widehat{f}(\xi) := \mathscr{F}f(\xi)$. Wir notieren zunächst einige Eigenschaften von $\mathscr{F}f$:

(i) $\mathscr{F}f$ ist wohldefiniert für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. In der Tat haben wir für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathscr{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(ii) $\mathscr{F}$ ist linear auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

(iii) $\mathscr{F}f$ ist stetig. Denn sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\xi_n \to \xi$. Setze $g_n(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} f(x) e^{-ix\xi_n}$ und $g(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} f(x) e^{-\mathrm{i}\, x\xi}$. Dann ist $|g_n| \leq |g|$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g_n \to g$ punktweise fast überall. Also folgt nach dem Satz von Lebesgue

$$\mathscr{F}f(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}f(\xi), \qquad n \to \infty.$$

Aus (i) – (iii) folgt, dass die Fouriertransformation $\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger linearer Operator mit Operatornorm höchstens $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}$ ist. Wir können dies noch etwas verschärfen. Im Hinblick darauf betrachten wir zuerst noch ein Beispiel:

Example 1.1. *Sei $f := \mathbb{1}_{(-1,1)}$. Wir rechnen für $\xi \neq 0$*

$$\begin{aligned} \mathscr{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\mathrm{i}\, x\xi}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{2\,\mathrm{i}\,\xi\sqrt{2\pi}} \Big[e^{-\mathrm{i}\, x\xi}\Big]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{2}{\xi\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{e^{\mathrm{i}\,\xi} - e^{-\mathrm{i}\,\xi}}{2\,\mathrm{i}}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \end{aligned}$$

sowie für $\xi = 0$: $\mathscr{F}f(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$. Damit ist

$$\mathscr{F}f(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

An diesem Beispiel sehen wir, dass $\lim_{|\xi|\to\infty} |\mathscr{F}f(\xi)| = 0$ und dass $\mathscr{F}f$ stetig ist (wir erinnern daran, dass $\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ nach Analysis 1). Als weitere wichtige Konsequenz wiederholen wir, dass $\xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ nicht *zu $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ gehört. Also gilt insbesondere*

$$\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \not\to \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

Im vorausgegangenen Beispiel ist $\mathscr{F}f$ nicht nur stetig, sondern strebt für große Argumente gegen Null. Dies ist in der Tat für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ der Fall. Um für den entsprechenden Satz von Riemann-Lebesgue weiter unten eine geeignete Sprechweise zu haben, machen wir zuerst eine

Definition 1.2. *Wir definieren den Raum $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ durch*

$$f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \big(f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d) \text{ und } \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\big).$$

Wir sagen, dass Elemente von $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ im Unendlichen verschwinden.

Es ist $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\sup})$ ein Banachraum. In der Tat ist $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ im Raum der stetigen, beschränkten Funktionen selber ein Banachraum. Wir wiederholen das noch einmal:

Lemma 1.3. *Sei $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$ der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *$(\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\sup})$ ist ein Banachraum.*
(b) *$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$ bezüglich $\|\cdot\|_{\sup}$. Genauer gilt*

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) = \overline{\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{\sup}},$$

wobei $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ die stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger sind. Damit ist $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\sup})$ selber ein Banachraum.

Proof. Ad (a). Sei $(f_j) \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\sup}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $|f_j(x) - f_m(x)| \leq \|f_j - f_m\|_{\sup} \to 0$, $j, m \to \infty$ und somit existiert für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ein $f(x) \in \mathbb{R}$ so, dass $f_j(x) \to f(x)$ mit $j \to \infty$. Da (f_j) Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_{\sup}$ ist, ist (f_j) beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_{\sup}$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|f(x)| \leq \lim_{j\to\infty} |f_j(x)| \leq \lim_{j\to\infty} \|f_j - f_m\|_{\sup} + \|f_m\|_{\sup} \leq C < \infty.$$

Damit ist $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ beschränkt. Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \lim_{j\to\infty} |f_j(x) - f_j(y)| \\ &= \lim_{j\to\infty} |f_j(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(y) + f_m(y) - f_j(y)| = (*) \end{aligned}$$

An dieser Stelle wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $m, j \geq N$ auch $\|f_j - f_m\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Wir fixieren ein solches $m \in \mathbb{N}$. Dann ist f_m leichmäßig stetig, und somit existiert ein $\delta > 0$ so dass $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Es folgt für $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $|x - y| < \delta$:

$$(*) \leq 2 \lim_{j\to\infty} \Big(\|f_j - f_m\|_{\sup}\Big) + |f_m(x) - f_m(y)| < \varepsilon.$$

Damit ist f stetig. Letztlich sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir finden $m \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + \|f_j - f_m\|_{\sup} < \varepsilon.$$

In dieser Abschätzung gehen wir nun zum Supremum über alle $x \in \mathbb{R}^d$ über, und damit ist (a) vollständig gezeigt. Ad (b). Es konvergiere $(f_j) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ gegen ein $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|\cdot\|_{\sup}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\|f_j - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für dieses j finden wir weiters ein $R > 0$ mit $|x| > R \Rightarrow |f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt für $|x| > R$:

$$|f(x)| = |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x)| \leq \|f_j - f\|_{\sup} + |f_j(x)| < \varepsilon.$$

Also $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ und die erste Behauptung folgt. Damit folgt auch schon, dass $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\sup})$ ein Banachraum ist. Zur letzten Bemerkung: Sei $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $|x| > R \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Sei nun $g_R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abschneidefunktion mit

$$g_R(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq R, \\ -\frac{t}{R} + 2 & \text{für } t \in (R, 2R), \\ 0 & |t| \geq R. \end{cases}$$

Dann betrachte $f_R(x) := g_R(|x|)f(x)$. Damit folgt $f_R \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$, sowie $|f(x) - f_R(x)| = |f(x)| < \varepsilon$ für $|x| > 2R$ und $|f(x) - f_R(x)| = (1 - g_R(x))|f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in (R, 2R)$ für $|x| \in (R, 2R)$. Also $\|f - f_R\|_{\sup} < \varepsilon$. Die Behauptung folgt.

Letztlich haben wir also gezeigt, dass $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \overline{\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)}^{\sup}$ gilt. Aber natürlich ist auch $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$, und damit

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \overline{\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)}^{\sup} \subset \overline{\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)}^{\sup} = \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d),$$

da $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ bezüglich $\|\cdot\|_{\sup}$ abgeschlossen ist. □

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz von Riemann-Lebesgue.

Theorem 1.4 (Riemann-Lebesgue). *Die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ ist ein beschränkter linearer Operator $\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ mit Operatornorm höchstens $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}$.*

Proof. In der Vorlesung haben wir über Dichtheit der $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-Funktionen in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ argumentiert. Hier geben wir ein leicht modifiziertes Argument, das rein über maßtheoretische Induktion funktioniert. Zuerst betrachten wir die eindimensionale Situation und die Funktion $f := \mathbb{1}_{(a,b)}$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann sehen wir wie im obigen Beispiel, dass $|\mathscr{F}\mathbb{1}_{(a,b)}(\xi)| \to 0$ mit $|\xi| \to \infty$. Im d-dimensionalen Fall, $d > 1$, betrachten wir nun die Indikatorfunktion eines achsenparallelen Quaders $Q = (a_1, b_1) \times ... \times (a_d, b_d)$, die sich schreiben lässt als $\mathbb{1}_Q = \mathbb{1}_{(a_1,b_1)} \cdot ... \cdot \mathbb{1}_{(a_d,b_d)}$. Nach Fubini gilt dann

$$\mathscr{F}\mathbb{1}_Q(\xi) = \prod_{k=1}^{n} (\mathscr{F}\mathbb{1}_{(a_k,b_k)})(\xi_k), \qquad \xi = (\xi_1, ..., \xi_d)^\top.$$

Wir wissen bereits, dass $\mathscr{F}\mathbb{1}_{(a_k,b_k)}$ für jedes k eine beschränkte Funktion ist. Sei nun $(\xi^{(n)}) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge mit $|\xi^{(n)}| \to \infty$, $n \to \infty$. Dann gibt es eine Koordinate $k_0 \in \{1, ..., d\}$, für welche $|\xi_{k_0}^{(n)}| \to \infty$ gilt, $n \to \infty$. In dieser Situation gilt dann insbesondere, dass

$$|\mathscr{F}\mathbb{1}_Q(\xi)| \leq \left| \Big(\prod_{k \neq k_0} (\mathscr{F}\mathbb{1}_{(a_k,b_k)}(\xi_k^{(n)}) \Big) (\mathscr{F}\mathbb{1}_{(a_{k_0},b_{k_0})}(\xi_{k_0}^{(n)}) \right| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

nach dem ersten Teil. Also stimmt das Riemann-Lebesgue-Lemma für Indikatorfunktionen von achsenparallelen Quadern, und wegen der Linearität der Fouriertransformation auch für endliche Summen

$$g = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbb{1}_{Q_k}, \tag{1.4}$$

wobei jedes Q_k ein achsenparalleler Quader ist. Sei nun $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir eine Funktion der Bauuart (1.4) mit $\|f - g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir fixieren ein solches g und notieren, dass dann bereits $\mathscr{F}g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ gilt, also insbesondere

$$\exists R > 0\colon\; |x| > R \Rightarrow |\mathscr{F}g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir fixieren ein solches R. Dann gilt für alle $|\xi| > R$:

$$|\mathscr{F}f(\xi)| \leq |\mathscr{F}f(\xi) - \mathscr{F}g(\xi)| + |\mathscr{F}g(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f - g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Eine kurze Bemerkung: In der Vorlesung haben wir etwas anders argumentiert, und zwar: Wissen wir bereits, dass $\mathscr{F}f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ für $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, so kann das Riemann-Lebesgue-Lemma auch rein über die Banachraumeigenschaften von $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ bewiesen werden. Nämlich wählen wir dann zu $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(f_k) \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f_k \to f$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist (f_k) eine $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$-Cauchyfolge und damit $(\mathscr{F}f_k)$ eine $\|\cdot\|_{\sup}$-Cauchyfolge in $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 1.3 ist $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\sup})$ ein Banachraum, und damit konvergiert $\mathscr{F}f_k \to g$ für ein $g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Dann muss noch $g = \mathscr{F}f$ identifiert werden. Dies folgt jedoch aus

$$\begin{aligned} |g(\xi) - \mathscr{F}f(\xi)| &\leq |g(\xi) - \mathscr{F}f_k(\xi)| + |\mathscr{F}f(\xi) - \mathscr{F}f_k(\xi)| \\ &\leq \|g - \mathscr{F}f_k\|_{\sup} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f - f_k\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad k \to \infty. \end{aligned}$$

Also stimmt $\mathscr{F}f$ mit der C_0-Funktion g überein, und damit folgt $\mathscr{F}f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Dann muss man noch zeigen, dass mit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ auch $\mathscr{F}f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ gilt, aber das lässt sich wie oben bewerkstelligen[1].

Bevor wir nun fortfahren, notieren wir explizit:

Die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ ist auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ **nicht** *bijektiv.*

Das wirft folgende Frage auf:

Auf welchen Räumen X ist $\mathscr{F}\colon X \to X$ bijektiv?

Wir werden in dieser Vorlesung keine allgemeine Antwort auf diese Frage geben. Etwas genauer machen wir nun zwei Bemerkungen:

[1]Das Argument ist natürlich etwas redundant, da man direkt wie im oben angegebenen Beweis argumentieren muss – allerdings lässt sich das auch elementar bewerkstelligen.

(i) Könnte ein solcher Raum irgendein $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ sein mit $1 < p \leq \infty$? Diese Frage ist etwas subtiler, da sie zuerst vernünftig reformuliert werden muss. In der Tat ist das definierende Integral der Fouriertransformation für $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$, nicht konvergent. Allerdings ist für jedes $1 \leq p < \infty$ der Raum $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Daher sollte für derartige Räume die obige Frage wie folgt formuliert werden:

Für welche $1 < p < \infty$ kann $\mathscr{F}\colon \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ zu einem bijektiven, stetigen linearen Operator $\overline{\mathscr{F}}\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden?

Wie wir sehen werden, ist das genau für $p = 2$ der Fall.

(ii) Um uns (ausgewählten) Antworten dieser Frage zu nähern ist es zuerst naheliegend, den Raum[2]

$$Y := \{f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)\colon\ \mathscr{F}f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)\}$$

zu betrachten. Wir werden nun sehen, dass $\mathscr{F}$ auf $Y(\mathbb{R}^d)$ in der Tat umkehrbar ist, und die Umkehrabbildung explizit angeben. Danach werden wir die Theorie wesentlich ausdehnen.

1.2. **Verträglichkeit der Fouriertransformation mit Operationen.** Bevor wir dieser Frage nachgehen, untersuchen wir zuerst das Verhalten der Fouriertransformation unter elementaren Operationen. Wir beginnen mit

Lemma 1.5. *Sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathbb{R}^d$ und definiere $\tau_h f(x) := f(x+h)$. Dann gilt*

$$\mathscr{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{\mathrm{i}\, h\xi}\mathscr{F}f(\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definiere weiters für $a \neq 0$ $m_a f(x) := f(ax)$. Dann gilt

$$\mathscr{F}(m_a f)(\xi) = \frac{1}{a^d}\mathscr{F}f\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

Proof. Wir rechnen für $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\mathscr{F}(\tau_h f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)e^{-\mathrm{i}\, x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)e^{-\mathrm{i}(z-h)\xi}\,\mathrm{d}x = e^{\mathrm{i}\, h\xi}\mathscr{F}f(\xi),$$

und die erste Behauptung folgt. Weiters folgt mit $y = ax \Rightarrow \mathrm{d}y = a^d\,\mathrm{d}x$

$$\mathscr{F}(m_a f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(ax)e^{-\mathrm{i}\, x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^d}\mathscr{F}f(\frac{\xi}{a}).$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Lemma 1.6. *Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dann gilt für alle $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:*

$$\mathscr{F}\big(\partial^\alpha f\big)(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\mathscr{F}f(\xi).$$

Setzen wir weiters $p_\alpha(x) := x^\alpha$, so gilt ebenfalls

$$\mathscr{F}\big(p_\alpha f\big) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\,\partial^\alpha\mathscr{F}f(\xi).$$

Proof. Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}f(\partial^\alpha f)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_x^\alpha f(x))e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\xi^\alpha e^{-\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\mathscr{F}f(\xi).\end{aligned}$$

Damit ist erste Behauptung gezeigt, und die zweite folgt analog. □

Lemma 1.7. *Sind $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, so gilt*

$$\mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g).$$

[2]Wir nennen diesen Raum in diesem Skript Y; man beachte allerdings, dass das keine allgemeine Konvention ist.

Proof. Wir erinnern zunächst, dass nach der Youngschen Ungleichung mit $f,g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ auch $f*g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ist. Es gilt für $\xi\in\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f*g)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)e^{-\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}ye^{-\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)e^{-\mathrm{i}(x-y)\xi}e^{-\mathrm{i}\,y\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}g(y)e^{-\mathrm{i}\,y\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}f(z)e^{-\mathrm{i}\,z\xi}\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathscr{F}f)(\xi)(\mathscr{F}g)(\xi).\end{aligned}$$

Hier haben wir im dritten bis letzten Schritt Fubini und speziell im vierten Schritt den Transformationssatz. Die Behauptung folgt. □

Wir fassen dies nun zusammen: Die Fouriertransformation verwandelt

- Translation zu Multiplikation mit $e^{\mathrm{i}\,\cdot}$,
- Differentiation zu Multiplikation mit Polynomen,
- Faltungsprodukte zu Produkten (bis auf einen Vorfaktor).

1.3. **Inversion der Fouriertransformation auf Y und approximative Inversion auf L^1.** Unser Ziel ist nun, die Fouriertransformation auf Y zu invertieren. Hierzu betrachten wir zuerst die folgende Analagie bzw. Heuristik: Ist nämlich $g\in\mathrm{L}^2((-\pi,\pi))$, so können wir g im L^2-Sinne *diskret* Fourier-entwickeln. Schreiben wir dies aus, so erhalten wir

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle g,e_k\rangle_{\mathrm{L}^2}e_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\int_{(-\pi,\pi)}g(x)\overline{\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\Big)}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\Big).$$

Interpretieren wir hier analog die Summe über $k\in\mathbb{Z}$ als Integral, so können wir vermuten, dass für $f\in Y(\mathbb{R}^d)$ die Fourierinversionsformel

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\qquad\text{für fast alle } x\in\mathbb{R}^d$$

gilt. Dies ist in der Tat wahr:

Proposition 1.8. *Sei $f\in Y(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für m^d-fast alle $x\in\mathbb{R}^d$*

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi,\tag{1.5}$$

wobei $f(x)$ hier im Sinne des genauen Repräsentanten zu verstehen ist:

$$f(x):=\lim_{R\searrow 0}\frac{1}{m^d(\mathrm{B}(x,R))}\int_{\mathrm{B}(x,R)}f\,\mathrm{d}m^d.$$

Ist $f\in Y(\mathbb{R}^d)$, so ist das Integral auf der rechten Seite von (1.5) konvergent. Allerdings ist Fubini nicht direkt anwendbar, denn

$$I:=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-\mathrm{i}(y-x)\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi$$

hat einen bezüglich der gemeinsamen Variablen (y,ξ) *nicht* produktintegrierbaren Integranden. Wir umgehen dieses Problem nun, indem wir stattdessen für $\varepsilon>0$ das Hilfsintegral

$$I_\varepsilon:=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-\mathrm{i}(y-x)\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi$$

betrachten. Wir erwarten, dass dann für $\varepsilon \searrow 0$

$$I_\varepsilon \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

gilt, und wir dann entscheidende Manipulationen auf I_ε vornehmen können, um die Fourierinversionsformel (1.5) zu zeigen. Durch die Einführung des Extrafaktors im Integranden versuchen wir also, *Konvergenz zu erzwingen*. Hierzu benötigen wir einen kleinen Exkurs und studieren zuerst eine Hilfsfunktion g, die wir dann mit dem Extrafaktor in I_ε in Verbindung bringen werden.

Dazu definieren wir die Funktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

Die spezielle Wahl des Vorfaktors $(2\pi)^{-d/2}$ wird sich später klären; denn insbesondere führt sie dazu, dass $\|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ gilt, cf. Lemma 1.9. Weiters setzen wir für $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

An dieser Stelle betonen wir, dass die Definition von g_ε *genau dieselbe ist wie diejenige bei den reskalierten Standardglättern.* Zum Vergleich bemerken wir, dass Standardglätter $j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ radialsymmetrische, in $\mathrm{B}(0,1)$ kompakt getragene C^∞-Funktionen mit L^1-Einheitsnorm sind, also $j \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{B}(0;1);[0,1])$ mit $\|j\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{B}(0,1))} = 1$ gilt. Definieren wir dann $j_\varepsilon := \varepsilon^{-d} j(\frac{x}{\varepsilon})$, so gilt analog $\|j_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ (mit dem Transformationssatz). Nun sind dies gerade die entscheidenden Eigenschaften, die es möglich machen,

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\colon\ j_\varepsilon * f \to f \text{ in } \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$$

für $1 \le p < \infty$ zu zeigen. Da g zwar nicht kompakt getragen, aber ebenfalls normiert und glatt ist, erwarten wir, dass auch

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\colon\ g_\varepsilon * f \to f \text{ in } \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$$

für $1 \le p < \infty$ gilt. Weiters erinnern wir, dass die Glättungen $j_\varepsilon * f(x)$ in jedem Lebesguepunkt von $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ gegen den Lebesguewert von f in x konvergieren:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} (j_\varepsilon * f)(x) = \lim_{R \searrow 0} \frac{1}{m^d(\mathrm{B}(x,R))} \int_{\mathrm{B}(x,R)} f\,\mathrm{d}m^d.$$

Gleichsam erwarten wir, dass in jedem Lebesguepunkt x von $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} (g_\varepsilon * f)(x) = \lim_{R \searrow 0} \frac{1}{m^d(\mathrm{B}(x,R))} \int_{\mathrm{B}(x,R)} f\,\mathrm{d}m^d \tag{1.7}$$

gilt. Nach diesen Vorbereitungen klären wir die

Struktur des Beweises von Proposition 1.8:

(a) Sei $f \in Y(\mathbb{R}^d)$ beliebig. Wir nehmen an, dass wir zeigen können:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\colon\ (g_\varepsilon * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2|y|^2}{2}}\,\mathrm{d}y. \tag{1.8}$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Da $f \in Y(\mathbb{R}^d)$, gilt $\mathscr{F} f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ nach Definition. Es ist dann $|\mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2|y|^2}{2}}| \le |\mathscr{F} f(y)|$, und $|\mathscr{F} f| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Andererseits gilt $e^{-\varepsilon^2|y|^2/2} \to 1$ punktweise fast überall für $\varepsilon \searrow 0$. In dieser Situation schließen wir also mit dem Satz über dominierte Konvergenz:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2|y|^2}{2}}\,\mathrm{d}y \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x}\,\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

(c) Sei nun $x \in \mathbb{R}^d$ ein Lebesguepunkt von f. Angenommen, wir können (1.7) beweisen. Dann folgt mit (1.8) und Schritt (b)

$$\begin{aligned}
\lim_{R\searrow 0} \frac{1}{m^d(\mathrm{B}(x,R))} \int_{\mathrm{B}(x,R)} f\,\mathrm{d}m^d &\overset{(1.7)}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0} (g_\varepsilon * f)(x) \\
&\overset{(1.8)}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2|y|^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{(1.9)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} f(y) e^{\mathrm{i}\, y\cdot x}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Aussage von Proposition 1.8. Um Proposition 1.8 zu zeigen, müssen wir also (1.8) und (1.7) begründen. Dies ist das Ziel des verbleibenden Abschnitts.

Im Hinblick auf (1.8) und (1.7) notieren wir zuerst das folgende

Lemma 1.9. *Definiere $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch (1.6). Dann hat g die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es gilt für $\varepsilon > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

(b) $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

(c) *Die Funktion g ist ein Fixpunkt der Fouriertransformation: $\mathscr{F} g = g$.*

Proof. Ad (a). Sei zuerst $d = 1$. Hier wissen wir bereits, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

gilt. Das ist die gewünschte Aussage. Für allgemeines d haben wir bereits früher in der Vorlesung gesehen, dass $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ist. Damit können wir den Satz von Fubini anwenden und finden

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|x_k|^2}{2}}\Big)\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^d \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_k|^2}{2}}\,\mathrm{d}x_k\Big) = 1$$

nach dem Obigen. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann folgt $\|g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = \|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ mit dem Transformationssatz, und (a) folgt. Ad (b). Das ist klar. Ad (c). Wiederum widmen wir uns zuerst der Situation in einer Dimension, d.h., $d = 1$. Wir notieren, dass g stetig differenzierbar ist und $g'(t) = -tg(t)$ erfüllt. Weiters gilt $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Unsere Behauptung ist nun, dass $\widetilde{g} := \mathscr{F} g$ dieselbe Differentialgleichung mit dem selben Anfangswert für $t = 0$ erfüllt – dann muss bereits $g = \mathscr{F} g$ gelten. Wir rechnen hierzu unter Berücksichtigung des Satzes über die Differentiation von Parameterintegralen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\,\mathrm{i}\, tx}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(-xg(x))e^{-\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g'(x)e^{-\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{wegen } g'(t) = -tg(t)) \\
&= \mathrm{i}\,\mathscr{F}g'(t) \\
&= \mathrm{i}^2\,t\mathscr{F}g(t) = -t\mathscr{F}g(t) \qquad (\text{nach Lemma 1.6}).
\end{aligned}
$$

Also $\widetilde{g}'(t) = -t\widetilde{g}(t)$, und außerdem gilt

$$
\widetilde{g}(0) = \mathscr{F}g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
$$

nach (a). Damit ist die Aussage für $d = 1$ bewiesen. Ist $d > 1$, so wenden wir wiederum Fubini an und berechnen zuerst mit $\xi = (\xi_1, ..., \xi_d)^\top$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}g(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_j^2}{2}}e^{-\mathrm{i}\,x_j\xi_j}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{x_j^2}{2}-\mathrm{i}\,x_j\xi_j}\,\mathrm{d}x_j = g(\xi).
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Lemma 1.10. *Seien $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$
\int_{\mathbb{R}^d}(\mathscr{F}f)g\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathscr{F}g)\,\mathrm{d}\xi.
$$

Proof. Es ist $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ integrierbar. Damit folgt mit Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}(\mathscr{F}f)g\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)e^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\mathscr{F}g)(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Damit ist alles gezeigt. □

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum

Beweis von (1.8). Sei $f \in Y(\mathbb{R}^d)$. Wir bestimmen im Folgenden für fixiertes $y \in \mathbb{R}^d$ die Fouriertransformation der Funktion

$$
k_y\colon \mathbb{R}^d \ni z \mapsto k_y(z) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{\mathrm{i}\,z\cdot y}e^{-\frac{\varepsilon^2|z|^2}{2}} \in \mathbb{C}.
$$

Nun ist mit der Variablentransformation $z' := \varepsilon z$ im dritten Schritt auch $\mathrm{d}z' = \varepsilon^d\,\mathrm{d}z$, und somit

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}k_y(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\,z\cdot y}e^{-\frac{\varepsilon^2|z|^2}{2}}e^{-\mathrm{i}\,z\cdot x}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\varepsilon^2|z|^2}{2}}e^{-\mathrm{i}\,z\cdot(x-y)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\varepsilon^d}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z'|^2}{2}}e^{-\mathrm{i}\,z'\cdot\frac{(x-y)}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\varepsilon^d}(\mathscr{F}g)\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^d}g\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) = g_\varepsilon(x-y),
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass g ein Fixpunkt von $\mathscr{F}$ ist – siehe Lemma 1.9(c). Da $g_\varepsilon(x-y) = g_\varepsilon(y-x)$ gilt, haben wir insbesondere $\mathscr{F}k_y(x) = \mathscr{F}k_x(y)$. Es gilt also insbesondere, dass

$$\begin{aligned} g_\varepsilon * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathscr{F}k_x)(y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_x(y)\mathscr{F}f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\,y\cdot x}e^{-\frac{\varepsilon^2|y|^2}{2}}\mathscr{F}f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade (1.8). □

Nun kommen wir zu der Verifikation von (1.7), was wir in der Vorlesung aus Zeitgründen nur erwähnt, aber nicht bewiesen hatten. Wir formulieren dies als

Proposition 1.11. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt (mit g und g_ε wie in (1.6)ff. definiert), dass*

$$\|g_\varepsilon * f - f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad \varepsilon \searrow 0.$$

Weiters konvergiert $g_\varepsilon * f(x)$ in allen Lebesguepunkten $x \in \mathbb{R}^d$ von f gegen den präzisen Repräsentanten von f, also

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} g_\varepsilon * f(x) = \lim_{R\searrow 0}\frac{1}{m^d(\mathrm{B}(x,r))}\int_{\mathrm{B}(x,r)} f\,\mathrm{d}m^d.$$

Zum Beweis benötigen wir zwei Hilfsaussagen, nämlich einen Satz über die Translationsstetigkeit und die sogenannte *kontinuierliche Minkowskiungleichung.*

Lemma 1.12. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\lim_{|h|\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proof. Wir zeigen das Lemma zuerst für kompakt getragene stetige Funktionen und verwenden dann ein Approximationsargument. Sei hierzu $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $(h_i) \subset \mathbb{R}^d$ mit $|h_i| \searrow 0$. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_i\colon x \mapsto f(x+h_i) - f(x)$ getragen in $\mathrm{spt}(f) \cup (\mathrm{spt}(f) + \mathrm{B}(0,r_i))$, und dies ist wiederum enthalten in der kompakten Menge $K := \overline{\mathrm{spt}(f) \cup (\mathrm{spt}(f) + \mathrm{B}(0,\max h_i))}$. Andererseits gilt $|g| \leq 2\|f\|_{\sup}$ – was über K integrierbar ist – und da $g_i(x) \to 0$ punktweise, folgt mit dominierter Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h_i)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x \to 0, \qquad i \to \infty.$$

Sei nun $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir $(f_k) \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - f_k\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei $(h_i) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge mit $|h_i| \searrow 0$. Dann finden wir nach dem Vorausgegangen ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h_{i_0}) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $i \geq i_0$. Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h_i)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leq & \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h_i)-f_k(x+h_i)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & + \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x+h_i)-f_k(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & + \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 1.13 (Kontinuierliche Minkowskiungleichung)**.** *Sei* $1 \le p < \infty$ *und* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l)$. *Dann gilt*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^l} \Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}m^d(x)\Big|^p \,\mathrm{d}m^l(y)\Big)^{\frac{1}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|^p\,\mathrm{d}m^l(y)\Big)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}m^d(x).$$

Proof. Wird nachgetragen. □

Wir kommen nun zu dem

Beweis von Proposition 1.11. Wir starten mit Lemma 1.9 (a). Nämlich ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1 \Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y.$$

Also gilt auch insbesondere, dass

$$|g_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p = \Big|\int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y\Big|^p.$$

An dieser Stelle verwenden wir die *kontinuierliche Minkowski Ungleichung*. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(y)(f(x-y)-f(x))\,\mathrm{d}y\Big|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} g_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon z)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} g(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

und von hieraus folgt die Aussage leicht mit dem Satz von Lebesgue. □

1.4. **Die Fouriertransformation auf** L^2**.** In diesem Abschnitt betrachten wir letztlich die Fouriertransformation auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Wir erinnern daran, dass für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ das Integral (1.2) überhaupt nicht definiert sein muss; diese Überlegung hat uns im ersten Abschnitt dazu gebracht, die Frage der Bijektivität von $\mathscr{F}$ auf L^p-Räumen zu reformulieren. Wir wollen – falls überhaupt möglich – die Fouriertransformation von $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ausgehend auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen. Hierzu benötigen wir das folgende Resultat:

Lemma 1.14. *Seien* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein normierter und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *ein Banachraum über* $\mathbb{C}$ *und* $X_0 \subset X$ *ein dichter Teilraum in* X. *Sei weiters* $A\colon X_0 \to Y$ *ein beschränkter linearer Operator. Dann existiert genau ein beschränkter linearer Operator* $\overline{A}\colon X \to Y$ *mit* $\overline{A}|_{X_0} = A$.

Ist weiters A *eine Isometrie, d.h., erfüllt* $\|Ax\|_Y = \|x\|_X$ *für alle* $x \in X_0$, *so ist auch* $\overline{A}$ *eine Isometrie.*

Proof. Existenz von A. Sei $x \in X$. Wir wählen gemäß Dichtheit von X_0 eine Folge $(x_j) \subset X_0$ mit $x_j \to x$. Da A auf X_0 beschränkt und linear ist, folgt $\|Ax_j - Ax_k\|_Y \le C\|x_j - x_k\|_X \to 0$, $j,k \to \infty$. Also ist (Ax_j) in Y Cauchy, und da Y Banachraum ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $Ax_j \to y$, $j \to \infty$.

Wir wollen nun $y := Ax$ definieren, aber hierfür müssen wir zuerst zeigen, dass y nicht von der speziellen Wahl der Folge (x_j) abhängt. Seien also $(x_j), (z_j) \subset X_0$ zwei Folgen mit $x_j \to x$, $z_j \to x$, und sei wie oben $\lim_{j\to\infty} Ax_j = y_1$, $\lim_{j\to\infty} Az_j = y_2$. Dann ist $(x_j - z_j)$ Nullfolge in X und damit

$$\|y_1 - y_2\|_Y = \lim_{j\to\infty} \|Ax_j - Az_j\|_Y \le C \lim_{j\to\infty} \|x_j - z_j\|_X = 0.$$

Also dürfen wir A auf X definieren via $Ax := \lim_{j\to\infty} Ax_j$, wobei für $x \in X$ $(x_j) \subset X$ eine beliebige Folge mit $x_j \to x$ ist.

Eigenschaften von $\overline{A}$. Die Linearität von A folgt sofort aus den Rechenregeln für Limiten. Weiters ist $\overline{A}|_{X_0} = A$. Denn ist $x \in X_0$, so wähle die konstante Folge (x_j) mit

$x_j = x$. Dann $\overline{A}x = \lim_{j\to\infty} Ax_j = Ax$. Die Beschränktheit sehen wir so: Sei $x \in X$ und wähle $(x_j) \subset X_0$ mit $x_j \to x$. Dann gilt

$$\|\overline{A}x\|_Y = \lim_{j\to\infty} \|Ax_j\|_Y \le \lim_{j\to\infty} \|A\|_{X_0\to Y}\|x_j\| = \|A\|_{X_0\to Y}\|x\|_X.$$

Also $\|\overline{A}\|_{X\to Y} \le \|A\|_{X_0\to Y}$. Aber $\|A\|_{X_0\to Y} \le \|\overline{A}\|_{X\to Y}$ ist klar, und damit gilt sogar Gleichheit $\|A\|_{X_0\to Y} = \|\overline{A}\|_{X\to Y}$. Letztlich noch kurz zur Eindeutigkeit. Sind B, C zwei beschränkte, lineare Fortsetzungen von A von X_0 auf X, so gilt $B - C = 0$ auf dem dichten Teilraum X_0. Man schließt dann ähnlich wie oben, dass dann notwendigerweise $B - C = 0$ auf X gelten muss.

Noch zur angegebenen Eigenschaft hinsichtlich Isometrien. Ist $x \in X$, so wähle $(x_j) \subset X_0$ mit $x_j \to x$. Dann gilt

$$\|\overline{A}x\|_Y\| = \lim_{j\to\infty} \|Ax_j\|_Y = \lim_{j\to\infty} \|x_j\|_X = \|x\|_X.$$

Dies beschließt den Beweis. □

Wollen wir die Fouriertransformation von $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ausdehnen, so genügt es, das folgende Programm zu zeigen:

Zur Fortsetzung von $\mathscr{F}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$:

(a) Für jedes $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zeigen wir in Theorem 1.15, dass

$$\|\mathscr{F}f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$\mathscr{F}$ ist also auf $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine L^2-Isometrie.

(b) Dann springt Lemma 1.14 ein und gibt uns die eindeutige Fortsetzung von $\mathscr{F}$ von dem in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dichten Teilraum $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 1.15. *Die Fouriertransformation erfüllt für alle $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$*

$$\|\mathscr{F}f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.10}$$

Proof. Wir zeigen den Satz in zwei Schritten.

Schritt 1. Fouriertransformation von C_c^∞-Funktionen. Wir behaupten zu allererst, dass $\mathscr{F}\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ falls $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{d}{4}$. Dann gilt mit Lemma 1.6

$$(1 + |\xi|^{4m})\mathscr{F}\varphi(\xi) = \mathscr{F}(\varphi) + |\xi|^{4m}\mathscr{F}(\varphi) = \mathscr{F}(\varphi + \Delta^{2m}\varphi),$$

wobei Δ der Laplaceoperator und $\Delta^{2m} = \Delta \circ ... \circ \Delta$ ($2m$-mal) ist. Da $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, ist $\varphi + \Delta^{2m}\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und damit nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $\sup_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{F}(\varphi + \Delta^{2m}\varphi)| =: C < \infty$. Dann gilt nach dem Obigen

$$|\mathscr{F}\varphi(\xi)| \le \frac{C}{1 + |\xi|^{2m}} \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nun integrieren wir die vorherige Ungleichung und finden mit Polarkoordinaten

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{F}\varphi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \le C\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}\xi}{1 + |\xi|^{4m}} \le C \cdot C_d \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{1 + r^{4m}}\,\mathrm{d}r.$$

Das letzte Integral ist genau dann endlich, wenn $d - 1 - 4m < -1$, also $\frac{d}{4} < m$ – gerade also das, was wir vorausgesetzt hatten.

Schritt 2. Die zentrale Identität. Sei $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Wir betrachten die Funktion $g(x) := \overline{f(-x)} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. Wir berechnen zuerst mit dem Transformationssatz im letzten Schritt

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)}e^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)e^{\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x} = \overline{\mathscr{F}f(\xi)}.$$

Wir betrachten nun die Funktion $h := f * g$. Dann gilt $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, und nach Schritt 1 gilt ebenso $\mathscr{F}h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Damit ist insbesondere $h \in Y(\mathbb{R}^d)$. Wir wissen aber auch, dass h eine stetige Funktion ist.

Weiters gilt mit Lemma 1.7, dass $\mathscr{F}h = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}|\mathscr{F}f|^2$. Hier haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $\mathscr{F}f = \overline{\mathscr{F}f}$ gilt. Damit schließen wir mit Proposition 1.8, dass

$$h(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathscr{F}h)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{F}f|^2\,\mathrm{d}\xi,$$

wobei wir benutzt haben, dass $h \in Y(\mathbb{R}^d) \cap C_0(\mathbb{R}^d)$ ist (und somit insbesondere 0 ein Lebesguepunkt der stetigen Funktion h ist). Nun berechnen wir $h(0)$ direkt nach Definition als

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\big|_{x=0} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\,\mathrm{d}y.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{F}f|^2\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\,\mathrm{d}x,$$

was zu zeigen war. □

Theorem 1.16. *Es gibt genau einen beschränkten linearen Operator* $\overline{\mathscr{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$*, der die auf der dichten Teilmenge* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *definierte Fouriertransformation fortsetzt. Dieser Operator* $\overline{\mathscr{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ *ist eine* L^2*-Isometrie, d.h., für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *gilt*

$$\|\overline{\mathscr{F}}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Wir können $\overline{\mathscr{F}}f$ *berechnen durch*

$$\overline{\mathscr{F}}f = \lim_{R\to\infty} \mathscr{F}(\mathbb{1}_{B(0,R)}f),$$

wobei der Limes im L^2*-Sinne zu verstehen ist.*

Proof. Der erste Teil des Theorems ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 1.14 und Theorem 1.15. Es ist also nur der letzte Teil des Theorems zu zeigen. Sei also $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Wir betrachten für $R > 0$ die Funktion $f_R := \mathbb{1}_{B(0,R)}f$. Nun finden wir für jedes solche $R > 0$ ein $g_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f_R - g_R\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{1}{R}$. Sei nun (R_j) eine Folge mit $R_j \nearrow \infty$. Dann gilt $g_{R_j} \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$, denn

$$\|f - g_{R_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|f - f_{R_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f_{R_j} - g_{R_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Damit folgt nach der Konstruktion von $\overline{\mathscr{F}}$ (vgl. Lemma 1.14) bereits

$$\overline{\mathscr{F}}f = \lim_{j\to\infty} \mathscr{F}g_{R_j},$$

wobei der Limes im L^2-Sinne zu verstehen ist. Andererseits haben wir auch

$$\|\mathscr{F}g_{R_j} - \mathscr{F}f_{R_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|g_{R_j} - f_{R_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Damit folgt die Aussage aus Lemma 1.3. □

Nun noch einige kurze Anmerkungen. In der Tat kann man zeigen, dass $\overline{\mathscr{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist mit Inverser $\overline{\mathscr{F}}^{-1}$, die analog als die L^2-Fortsetzung des Operators $\mathscr{F}^{-1}$ gegeben ist. Insbesondere ist $\overline{\mathscr{F}}$ ein *unitärer Operator*, was allerdings erst in Vorlesungen zur Funktionalanalysis besprochen wird.

Man kann weiters zeigen, dass die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ von $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zu einem stetigen linearen Operator $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden kann, falls $1 \le p \le 2$; hierbei ist $p' := \frac{p}{p-1}$ der Hölderkonjugierte Exponent von p. Dies benötigt etwas Interpolationstheorie und ist ebenfalls den Vorlesungen über Funktionalanalysis vorbehalten.

1.5. **Ein technischner Nachtrag*.** Wir hatten in der Vorlesung erwähnt, jedoch nicht bewiesen, dass die Faltung zueinander dualer L^p-Funktionen gleichmäßig stetig ist. Dies formulieren wir nun genau und beweisen es:

Lemma 1.17. *Sei* $1 \le p \le \infty$ *und sei* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ *und* $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)$, *wobei* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Dann ist* $f * g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$, *und es gilt die Abschätzung*

$$\|f * g\|_{\sup} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.11}$$

Proof. Sei $1 \le p < \infty$. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.

Schritt 1: Approximation. Wir wählen zu $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(f_k) \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f_k \to f$ in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Dann wissen wir bereits aus vorherigen Vorlesungen, dass $f_k * g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt. Weiters gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(f_k * g)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x-y) g(y)| \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x-y)|^{\frac{1}{p}} (|f_k(x-y)|^{\frac{1}{p'}} g(y)|) \,\mathrm{d}y \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x-y)| \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x-y)|\, |g(y)|^{p'} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \|f_k\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x-y)|\, |g(y)|^{p'} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p'}} =: \mathbf{I}(x).
\end{aligned}$$

Sei nun $(x_n) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge mit $|x_n| \nearrow \infty$. Da f_k beschränkt ist und $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)$, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $y \mapsto |f_k(x_n - y)|\, |g(y)|^{p'}$ punktweise beschränkt durch $|g(y)|$, und es gilt $f_k(x_n - y)|g(y)|^{p'} \to 0$ mit $n \to \infty$ punktweise, da f_k kompakt getragen ist. Da $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, folgt $\mathbf{I}(x_n) \to 0$, $n \to \infty$. Damit erhalten wir, dass $f_k * g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Schritt 2: Grenzübergang. Wir bemerken nun, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f_k * g(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f_k(x-y)|\, |g(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f_k(x-y)|^p \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^{p'} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f - f_k\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Da diese Abschätzung nun unabhängig von x ist, finden wir durch Supremumsbildung

$$\|f * g - f_k * g\|_{\sup} \le \|f - f_k\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Schritt 3: Schlussfolgerung. Nach Schritt 1 gilt $f_k * g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Damit folgt nach Schritt 2, dass $f * g \in \overline{\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)}^{\sup}$. Aber nach Lemma 1.3 ist $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$, und damit $f * g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Die angegebene Abschätzung folgt dann wie in der in Schritt 2 angegebenen Abschätzung. Der Beweis ist vollständig. $\square$

2. Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen

Wir diskutieren nun kurz, wie man die vorausgegangene Theorie nutzen kann, um bestimmte partielle Differentialgleichungen zu lösen. Genauer betrachten wir die *homogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } t = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Hierbei ist $u_0 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ein Anfangswert, den wir der Einfachheit halber zu $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gehörend annehmen. Entsprechend nimmt t die Rolle der *Zeitvariablen* und x die Rolle der *Ortsvariablen* ein. Im Allgemeinen gibt es für partielle Differentialgleichungen keine vereinheitlichende Lösungstheorie wie zum Beispiel bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für manche partielle Differentialgleichungen – wie wir sehen werden, die obige – können wir den Fourierapparat nutzen, um eine systematische Lösungsmethode anzugeben. Nämlich nehmen wir an, $u\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Gleichung (2.1). Wir nehmen dann auf beiden Seiten der Gleichung (2.1) die Fouriertransformation bezüglich der Ortsvariablen x. Dies ergibt mit Lemma 1.6:

$$\begin{cases} \partial_t \mathscr{F} u(t,\xi) + |\xi|^2 \mathscr{F}_x u(t,\xi) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d, \\ \mathscr{F} u(0,\xi) = \mathscr{F} u_0(\xi) & \text{für } t = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Wir definieren nun für fixiertes $\xi \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $v(\xi) := \mathscr{F} u(t,\xi)$. Dann erhalten wir eine *gewöhnliche Differentialgleichung* in t, nämlich

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = -|\xi|^2 v(t) & \text{für } t > 0, \\ v(0) = \mathscr{F}_x u_0(\xi). \end{cases} \tag{2.3}$$

Dabei bezeichnet $\mathscr{F}_x$ die Fouriertransformation nach der Ortsvariablen. Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir leicht lösen, und finden, dass

$$v(t) = v(0) e^{-|\xi|^2 t}, \qquad t \geq 0,$$

die Differentialgleichung (2.3) löst. Da $v(t) = \mathscr{F}_x u(t,\xi)$,

$$\mathscr{F}_x u(t,\xi) = \Big((\mathscr{F} u_0(\xi)) e^{-|\xi|^2 t} \Big).$$

Angenommen, wir können mit einer Funktion g schreiben $\mathscr{F}_x g(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$. Dann gilt

$$u(t,x) = \mathscr{F}_x^{-1} \Big((\mathscr{F}_x u_0(\xi)) (\mathscr{F}_x g)(t,\xi) \Big)$$

Andererseits ist nach Lemma 1.7

$$\mathscr{F}_x (g * u_0)(t,\xi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} (\mathscr{F}_x g)(t,\xi) (\mathscr{F}_x u_0)(\xi).$$

Hieraus folgern wir, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (g * u_0)(t,x), \tag{2.4}$$

wobei die Faltung rein in der Ortsvariablen zu verstehen ist. Um eine Lösung zu der partiellen Differentialgleichung (2.1) zu finden, müssen wir also nur noch $\mathscr{F}_x g(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$ nach g lösen, wobei t fixiert ist. Hierzu nutzen wir Lemma 1.9(c), nämlich, dass $h\colon \xi \mapsto e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation ist. Wir setzen $G(t,\xi) := e^{-t|\xi|^2}$. Dann ist

$$G(t,x) = e^{-\frac{|(\sqrt{2t})x|^2}{2}}.$$

und die Fouriertransformation von $G(t,x)$ in ξ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathscr{F} G(t,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|(\sqrt{2t})x|^2}{2}} e^{-\mathrm{i}\, x \cdot \xi} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\mathrm{i}\, z \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2t}}} \,\mathrm{d}z \qquad = \frac{1}{\sqrt{2t}^d} h\Big(\frac{\xi}{\sqrt{2t}}\Big) = \frac{1}{(2t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in (2.4) ein und finden sodann, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) \,\mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

Somit haben wir letztlich eine *explizite Lösungsformel* für die Gleichung (2.1) hergeleitet. Mehr dazu erfahren Sie in der Vorlesung *'Einführung in die partiellen Differentialgleichungen'* im kommenden Sommersemester.