Analysis 1

30.11.2017
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 14.12.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Grenzwerte **(1+1+1+1)+(1+1+1+1)+2 = 10 Punkte**

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Wertetabelle:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\tan(x)$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}.$

Arbeiten Sie dabei z.B. mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen.

Aufgabe 2: Sinus und Cosinus Hyperbolicus **(1.5+1.5)+4+3 = 10 Punkte**

Wir definieren den *Sinus* bzw. *Cosinus hyperbolicus* einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \quad \text{bzw.} \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv ist. Zeigen Sie weiters, dass $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, aber weder injektiv noch surjektiv ist, allerdings die Einschränkung $\cosh|_{[0,\infty)}\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und schließen Sie daraus mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass die Einheitshyperbel $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 - y^2 = 1\}$ geschrieben werden kann als $H = \{(\pm\cosh(t), \sinh(t))\colon\ t \in \mathbb{R}\}$.

In diesem Sinne nehmen also die Hyperbelfunktionen für die Hyperbel dieselbe Stellung ein, welche die trigonometrischen Funktionen für den Kreis einnehmen. Wir untersuchen nun die Ähnlichkeit genauer an der Reihendarstellung.

(c) Zeigen Sie anhand der obigen Definition, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

und vergleichen Sie dies mit der Reihendarstellung von Sinus und Cosinus.

Aufgabe 3: Komplexe trigonometrische Funktionen **2+2+2+2+2 = 10 Punkte**

Wie in Aufgabe 2 definieren wir nun für $z \in \mathbb{C}$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) \quad \text{bzw.} \quad \cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gelten die folgenden Additionstheoreme für sinh und cosh: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2),$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\sinh(z_2) + \sinh(z_1)\cosh(z_2).$$

(b) Wir definieren nun für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) := \frac{\sinh(\mathrm{i}\, z)}{\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad \cos(z) := \cosh(\mathrm{i}\, z).$$

Drücken Sie $\sin(z)$ und $\cos(z)$ durch die komplexe Exponentialfunktion aus und leiten Sie zudem die Reihendarstellungen von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ her. Schlussfolgern Sie, dass die Definitionen des komplexen Sinus bzw. komplexen Cosinus für reelle Argumente mit dem aus der Vorlesung bekannten Sinus bzw. Cosinus übereinstimmen.

(c) Es seien nun $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\cos(x + \mathrm{i}\, y) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y),$$
$$\sin(x + \mathrm{i}\, y) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$$

gilt.

(d) Bestimmen Sie mit Beweis die Menge $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} \colon \sin(z) = 0\}$.

(e) Indem Sie $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, zeigen Sie anhand von Teilaufgabe 2 (b) und der geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: Dreht man die in Teilaufgabe 2 (b) definierte Einheitshyperbel um $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn, so erhält man den Graphen der Funktion $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{2x}$.

Bemerkung: Hier war in der Erstfassung des Übungsblattes ein Fehler bei der Definition von f.

Aufgabe 4: Umkehrung der Hyperbelfunktionen **4+(2+4) = 10 Punkte**

Es sei für $x \in \mathbb{R}$ der *Tangens hyperbolicus* definiert durch

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie

(a) zuerst, dass $\sinh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist und bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck der Umkehrfunktion von sinh.

(b) sodann, dass $\tanh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und umkehrbar ist. Bestimmen Sie letztlich einen expliziten Ausdruck der Umkehrfunktion von tanh.

Die von Ihnen in (a) bzw. (b) bestimmten Umkehrfunktionen heißen *Area Sinus Hyperbolicus* bzw. *Area Tangens Hyerbolicus*.