Analysis 1

30.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
ABGABE: 07.12.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Grenzwerte **3+3+4 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \searrow 0} x^k \log(x), \quad \lim_{x \to \infty} x^k \log(x), \quad \lim_{x \to \infty} x^{-1} \log^k(x).$$

Substituieren Sie hierfür $x = \exp(z)$ und untersuchen Sie, wie sich die jeweiligen Grenzübergänge für x in z widerspiegeln. Begründen Sie, warum derartige Substitutionen erlaubt sind.

Aufgabe 2: Rechnen in $\mathbb{C}$ **2+3+2+3 = 10 Punkte**

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen $z_1, ... z_4 \in \mathbb{C}$ in der Form $z_i = a_i + \mathrm{i}\, b_i$, wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sind $(i = 1, ..., 4)$, und bestimmen Sie sowohl $\overline{z_i}$ als auch $|z_i|$:

$$z_1 = \frac{2+i}{4-i}, \quad z_2 = (2+3\,\mathrm{i})^2, \quad z_3 = z_1 z_2, \quad z_4 = \frac{4+6\sqrt{3}+\mathrm{i}(4\sqrt{3}-6)}{2-3\,\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 3: Darstellungen von Mengen in der Gaußebene **(2+2+2)+ 4 = 10 Punkte**

Wie aus der Vorlesung bekannt, können komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ durch Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden. In diesem Zusammenhang nennen wir $\mathbb{R}^2$ auch Gaußebene bzw. Gaußsche Zahlenebene.

(a) Stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dar:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon \ \left| \frac{1}{z} \right| < 2 \right\},$$
$$B := \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ |\operatorname{Re}(z)| \leq 1 \right\},$$
$$C := \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ |\exp(z)| \leq 1 \right\}.$$

(b) Nun sei für eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ und eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$

$$zA := \left\{ z \cdot a \colon \ a \in A \right\}.$$

Auf Teilaufgabe (a) aufbauend, stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene dar, indem Sie sich die geometrische Interpretation der Multiplikation zweier komplexen Zahlen zu Nutze machen:

$$D := \mathrm{i}\, A, \quad E := -\frac{\mathrm{i}}{2} B, \quad F := (2-i) C.$$

Aufgabe 4: Reihen in $\mathbb{C}$ **3+4+3 = 10 Punkte**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen in $\mathbb{C}$ konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \right)^n.$$
