Analysis 1

26.10.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder
Abgabe: 02.11.2017 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: **5+5 = 10 Punkte**

Zeigen Sie

(a) direkt mit Hilfe des binomischen Satzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} := \{1, 2, 3, ...\}$ die Ihnen bereits aus der Vorlesung bekannte Bernoullische Ungleichung gilt, d.h.,

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

(b) mit Hilfe eines ähnlichen Arguments wie in Teilaufgabe (a), dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} := \{2, 3, ...\}$ gilt

$$(1 + x)^n > \frac{n^2}{4} x^2.$$

Aufgabe 2: **4 + (2+2+2) = 10 Punkte**

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je eine bestimmt divergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass der entsprechende Fall eintritt. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Aufgabe 3: **6+4 = 10 Punkte**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gegen a konvergiert. Gilt auch die Rückrichtung? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

bitte wenden ;) $\longrightarrow$

Aufgabe 4: **5 + 5 = 10 Punkte**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *nicht* gegen $a \in \mathbb{R}$. Vervollständigen Sie den nachfolgenden Satz, der diese Aussage versprachlichen soll; arbeiten Sie dabei direkt an der in der Vorlesung gegebenen Definition von Folgenkonvergenz:

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass...

(b) Zeigen Sie direkt an der von Ihnen in (a) gegebenen Aussage, dass die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $a = 1$ konvergiert.