Analysis 1
18.10.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder

Tutorium 1–Zusatz

Da in der Woche vom 18.10.2017 noch kein Übungsblatt besprochen wird, sind hier noch einige Aufgaben zusammengestellt für den Fall, dass die Aufgaben des ersten Tutoriumsblattes nicht ausreichen. Zumal dies von Übungsgruppe zu Übungsgruppe variiert, werden auf der Vorlesungswebsite Lösungen zu diesem Blatt veröffentlicht.

Aufgabe 1: Tutorium 1–Induktion
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Aufgabe 2: Tutorium 1–Rationale Zahlen, Äquivalenzklassen
Wir definieren auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ eine Relation '$\sim$' durch

$$(p,q) \sim (p',q') :\Leftrightarrow pq' = p'q.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch '$\sim$' eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gegeben ist.

(b) Wir definieren nun $\widetilde{\mathbb{Q}}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. '$\sim$'. Erläutern Sie, wie diese Definition mit den aus der Schule bekannten rationalen Zahlen zusammenhängt (gehen Sie insbesondere auf die Bedeutung der Äquivalenzklassen ein).

(c) Auf (b) aufbauend, definieren Sie eine Operation '$\widetilde{\oplus}\colon \widetilde{\mathbb{Q}} \times \widetilde{\mathbb{Q}} \to \widetilde{\mathbb{Q}}$' auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$, die der aus der Schule bekannten Addition rationaler Zahlen entspricht.

Zeigen Sie direkt anhand Ihrer Definition, dass Operation wohldefiniert ist.

(d) Bearbeiten Sie (c) für die Multiplikation rationaler Zahlen.

Aufgabe 3: Tutorium 1–Rechenregeln für Brüche
In der Vorlesung wurde für einen allgemeinen Körper $(K,+,\cdot)$ gezeigt, dass die Gleichung $ax = b$ für $a \neq 0$ eine eindeutige Lösung hat. Diese wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet.
Zeigen Sie anhand dieser Definition und den Körperaxiomen, dass die folgenden Rechenregeln für Brüche gelten:

(a) Für alle $a, b \in K$ und $c, d \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

(b) Für alle $a, b \in K$ und $c, d \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}.$$