Zusammenfassung der Vorlesung

Analysis 1

Herbert Koch
Universität Bonn
Wintersemester 2016/2017

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

- Otto Forster: Analysis 1, 12. Auflage, Springer Spektrum 2015
- Terence Tao: Analysis 1, 3. Auflage, Hindustan Book Agency 2014
- Winfried Kaballo: Einführung in die Analysis 1, Spektrum 1999

Tippfehler und Korrekturen bitte an `koch@math.uni-bonn.de` oder in der Sprechstunde.

Diese Zusammenfassung ist nur für Hörer der Vorlesung Analysis 1 an der Universität Bonn, Wintersemester 2017/2018, bestimmt. Eine aktuelle Version ist unter

`http://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/WiSe2017/V1B1_WS_17.html`

zu finden.

Inhaltsverzeichnis

09.10.17

0 Mengen und die natürlichen Zahlen

0.1 Elementare Aussagenlogik

Mathematische Sachverhalte werden in Form von Aussagen und Implikationen beschrieben. Eine Aussage kann wahr oder falsch sein. Eine Aussage A kann weitere Aussagen B implizieren. Wir schreiben dann $A \Longrightarrow B$ oder $B \Longleftarrow A$. Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn $A \Longrightarrow B$ und $A \Longleftarrow B$. Wir schreiben dann $A \Longleftrightarrow B$.

Die Negation nicht A ist wahr, falls A falsch ist, und falsch, falls A wahr ist.

Sind A und B Aussagen, so ist (A und B) die Aussage, dass sowohl A wie auch B wahr ist und (A oder B) die Aussage, dass mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Beispiele.

(i) n ist eine gerade Zahl

(ii) n ist eine Primzahl

(iii) $2 * 3 = 4$

(iv) Das Objekt ist ein Auto

(v) Das Objekt ist rot.

(vi) Jedes Auto ist rot.

(vii) Es gibt keine größte Primzahl.

- ((i) und (ii)): $n = 2$.
- ((nicht (i)) und (ii)): $n \in \{3, 5, 7 \ldots\}$.
- ((i) oder (ii)): $n \in \{2, 3, 5, 7 \ldots\}$.
- (iii) ist falsch.
- (nicht (iii)) ist wahr.
- ((nicht A) ist wahr) $\Longleftrightarrow$ (A ist falsch)
- Beweis durch Gegenbeispiel: Es genügt, ein blaues Auto zu finden, um zu beweisen, dass (vi) falsch ist.

- Beweis durch Widerspruch von (vii): Wir nehmen an, es gäbe eine größte Primzahl. Wir nennen sie P. Seien $1 < p_1 < p_2 \cdots < P$ alle Prinzahlen. Dann ist
$$p_1 p_2 \ldots P + 1$$
durch keine der Primzahlen teilbar und daher eine Primzahl. Das ist der gewünschte Widerspruch zur Existenz einer größten Primzahl.

Wir können uns mit Wahrheitstafeln einen Überblick verschaffen.
Wahrheitstafel für A und B:

A	B	A und B	A oder B	A oder (nicht B)
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	f	w	f
f	f	f	f	w

Es gelten die De Morganschen Gesetze,

$$\text{nicht } (A \text{ und } B) = (\text{ nicht } A) \text{ oder } (\text{ nicht } B)$$

$$\text{nicht } (A \text{ oder } B) = (\text{ nicht } A) \text{ und } (\text{ nicht } B),$$

die mit Wahrheitstafeln bewiesen werden können.

0.2 Mengen

Georg Cantor (1845-1918) ist der Begründer der modernen Mengenlehre.

Eine Menge ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Wir schreiben
$$M = \{a, b, c\}$$
für die Menge mit den Elementen a, b und c.

Es gibt eine Menge, die kein Element enthält. Diese Menge wird mit $\{\,\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet und die leere Menge genannt.

Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir $x \in M$. Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Wir schreiben $a \notin M$, falls a nicht in M ist.

Die Vereinigung $A \cup B$ der Mengen A und B ist die Menge, die alle Elemente von A und B enthält. Der Schnitt $A \cap B$ zweier Mengen ist die Menge der Elemente, die sowohl in A wie auch in B enthalten ist. Ist jedes Element der Menge A auch in B enthalten, so nennen wir A Teilmenge von B und schreiben $A \subset B$.

Ist $A \subset B$, so bezeichnen wir mit $B \backslash A$ die Teilmenge von B, die aus den Elementen von B besteht, die nicht in A enthalten sind. Ist die Menge B aus dem Kontext klar, so nennen wir $A \backslash B$ das Komplement.

Zwei Teilmengen A and B heißen *disjunkt*, wenn der Schnitt leer ist.

Man kann die De Morganschen Gesetze nachprüfen: Seien $A, B, C \subset M$:

$$M \backslash (A \cap B) = (M \backslash A) \cup (M \backslash B)$$

$$M \backslash (A \cup B) = (M \backslash A) \cap (M \backslash B)$$

sowie die *Kommutativgesetze*

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A,$$

die *Assoziativgesetze*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

und die *Distributivitätgesetze*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C).$$

Die *Potenzmenge* einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Beispiel:

$$P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Russelsche Antinomie. Sei M die Menge aller Mengen. Nun sei A die Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten, und B die Menge aller Mengen, die das nicht tun. Ist $B \in A$? Falls ja, so ist $B \in B$, was impliziert, dass B sich nicht selbst enthält. Falls nein, so ist B kein Element von B, und damit folgt $B \in B$ und damit $B \in A$. Wir erhalten einen Widerspruch.

Lösung der Antinomie: Der Begriff Menge aller Mengen ist nicht zulässig, da nicht spezifizierte Mengen nicht als Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens betrachtet werden.

Zuletzt stellen wir kurz dar, wie man Aussagen über Mengen mittels Wahrheitstafeln beweisen kann. Dies zeigen wir am Beispiel des obigen Distributivgesetzes

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Wollen wir dies mit Hilfe einer Wahrheitstafel beweisen, so übersetzen wir dies zuerst zu

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

was wiederum zu

$$((x \in A) \,\text{und}\, (x \in B \,\text{oder}\, x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A \,\text{und}\, x \in B) \,\text{oder}\, (x \in A \,\text{und}\, x \in C))$$

äquivalent ist. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir im Folgenden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} '\wedge' \quad & \text{für 'Und' sowie} \\ '\vee' \quad & \text{für 'Oder',} \end{aligned}$$

wobei hier 'oder' als *nicht ausschließendes 'Oder'* zu verstehen ist. Definieren wir also die Aussagen $\mathcal{A} :\Leftrightarrow x \in A$, $\mathcal{B} :\Leftrightarrow x \in B$ und $\mathcal{C} :\Leftrightarrow x \in C$, so müssen wir zeigen, dass die Aussage $\mathcal{D}$ gegeben durch

$$(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$$

gilt. Dies läuft im Wesentlichen auf eine systematische Fallunterscheidung hinaus.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	$\mathcal{D}$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

Die zu zeigende Aussage besteht gerade darin, dass für sämtliche Konstellationen von $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ in der $\mathcal{D}$-Spalte stets ein 'w' steht, und dies ist hier genau dann der Fall, wenn jeweils in den beiden vorangegangenen Spalten derselbe Wahrheitsgehalt steht. Betrachten wir exemplarisch die vierte Spalte von oben, d.h., $\mathcal{A}$ ist wahr, und sowohl $\mathcal{B}$ als auch $\mathcal{C}$ sind falsch. Da $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ *beide* falsch sind, muss ihr 'nicht-ausschließendes Oder' (d.h., '$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$') falsch sein. Weiters ist $\mathcal{A}$ wahr, $\mathcal{B}$ jedoch falsch, und somit muss das 'Und' (d.h., $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$) falsch sein – analog für $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$. Nun wissen wir bereits, dass $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ falsch ist. Also muss dann das 'Und' (i.e., $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$) der entsprechenden Aussagen falsch sein. Außerdem wissen wir bereits, dass $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$ beide falsch sind, und somit muss ihr 'nicht-auschließendes Oder' ebenfalls falsch sein. Nun steht in der beiden vorletzten Spalten der vierten Zeile jeweils ein 'f', und somit ist $\mathcal{D}$ in diesem Fall wahr.

Der Beweis durch Wahrheitstafeln besteht dann darin, sämtliche Konstellationen von $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abzuarbeiten und letztlich festzustellen, dass sich unabhängig vom Wahrheitsgehalt der einzelnen Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ immer eine wahre Aussage ergibt.

0.3 Abbildungen

Seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ ordnet jedem Element von A ein Element von B zu. Alternativ können wir Abbildungen $f : A \to B$

als Teilmenge $C \subset \{(a, b) : a \in A, b \in B\} =: A \times B$ verstehen, so dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert, so dass $(a, b) \in C$.

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *injektiv*, falls aus $f(a) = f(b)$ folgt dass $a = b$. Sie heißt *surjektiv*, falls zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ existiert, und *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist. Wir drücken diese Aussage 'surjektiv' durch die Quantoren 'für alle' $\forall$, 'es existiert' $\exists$ und 'es existiert genau ein' $\exists!$

$$f : A \to B \text{ ist surjektiv } \iff \forall b \in B\, \exists a \in A \text{ so dass } b = f(a).$$

Es empfiehlt sich, diese Formalismen zurückhaltend einzusetzen.

Satz 0.1 (Cantor)**.** *Sei A eine Menge. Es gibt keine surjektive Abbildung $f : A \to P(A)$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Sei $f : A \to P(A)$ eine surjektive Abbildung. Sei

$$B = \{a : a \notin f(a)\}$$

Da f surjektiv ist, existiert $b \in A$ so dass $B = f(b)$ ist. Nach der Definition von B ist dann $b \notin B$. Ist $b \notin B$, so folgt aber wieder mit der Definition von B, dass $b \in f(b) = B$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Existenz einer surjektiven Abbildung $M \to P(M)$. $\square$

Der Satz von Cantor sagt, dass die Potenzmenge 'größer' ist als die Menge selbst.

Definition 0.2. *Wir nennen zwei Mengen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.*

0.4 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist eine Teilmenge T von $M \times M$ mit den Eigenschaften:

(i) (a, a) für alle $a \in M$.

(ii) $(a, b) \in T$ genau dann, wenn $(b, a) \in T$.

(iii) Falls $(a, b) \in T$ und $(b, c) \in T$ so ist auch $(a, c) \in T$.

Wir schreiben $a \sim b$ für $(a, b) \in T$. Die Äquivalenzklasse von a ist die Menge aller $b \in M$ mit $a \sim b$. Wir schreiben diese Menge als

$$\{b \in M : a \sim b\}$$

Beispiel $M = \mathbb{N}$,

$$T : \{(n, m) : n - m \text{ ist gerade }\}.$$

Es gibt zwei Äquivalenzklassen: Die geraden und die ungeraden Zahlen.

0.5 Die Peanoaxiome der natürlichen Zahlen

Definition 0.3. *Die natürlichen Zahlen sind eine Menge* $\mathbb{N}$ *mit einer Abbildung* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, so dass die folgenden Aussagen (Axiome) gelten:*

(i) Es gibt eine natürliche Zahl, die wir 0 *nennen.*

(ii) S *ist injektiv.*

(iii) 0 *ist nicht im Bild von* S*, d.h. es existiert kein* $x \in \mathbb{N}$ *mit* $S(x) = 0$*.*

(iv) Ist $K \subset \mathbb{N}$ *eine Teilmenge, die* 0 *enthält. Für alle* $x \in K$ *sei auch* $S(x) \in K$*. Dann ist* $K = \mathbb{N}$*.*

Die Addition: $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genügt

(i) $a + 0 = a \qquad \forall a \in \mathbb{N}$

(ii) $a + S(b) = S(a + b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Multiplikation: $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genügt

(i) $a * 0 = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{N}$

(ii) $a * S(b) = a + (a * b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}$

Satz 0.4. *Es existiert genau eine Abbildung* $+$ *und eine Abbildung* $*$ *mit diesen Eigenschaften.*

(i) Es gelten die Kommutativgesetze and die Assoziativgesetze für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$a+b = b+a, \quad a*b = b*a \quad a+(b+c) = (a+b)+c, \quad a*(b*c) = (a*b)*c.$$

(ii) 0 *ist das Neutralelement der Addition,* $1 = S(0)$ *ist das Neutralelement der Multiplikation.*

(iii) Es gilt das Distributivgesetz:

$$a * (b + c) = a * b + a * c.$$

(iv) $ab = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$ *oder* $b = 0$*.*

Sind $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{N}'$ *(Modelle) natürliche(r) Zahlen, so existiert genau eine bijektive Abbildung* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *mit* $\phi(0) = 0'$ *und* $\phi(S(x)) = S'(\phi(x))$ *für alle* $x \in \mathbb{N}$*.*

Das Buch von Tao enthält Beweise dieser und anderer Aussagen.

Die Existenz natürlicher Zahlen kann man über Mengen erhalten:

$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \dots\}$$

mit der offensichtlichen Wahl für S: $S(A) = \{A\}$.

Gödel (1906-1978) hat die mathematische Logik mit zwei Resultaten revolutioniert.

- Die Axiome der natürlichen Zahlen sind nicht vollständig: Es lassen sich Aussagen formulieren, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.
- Man kann nicht beweisen, dass aus den Axiomen keine Widersprüche folgen.

Genauer gelten diese Aussagen für alle Axiome die Existenz der natürlichen Zahlen implizieren.