Analysis 3, Übungsblatt Nr. 11

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 02.02.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für $d \geq 1$ sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 1 (Gute Kerne)**.** Seien $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\{K_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{\delta>0}$ eine Familie von guten Kernen.[1] Zeigen Sie:

(a) Ist $\delta > 0$, so ist die Faltung

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy$$

eine integrierbare Funktion von x.

(b) Es gilt:

$$\|(f * K_\delta) - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0 \text{ wenn } \delta \to 0.$$

Aufgabe 2 (Integraloperatoren)**.** Seien $1 \leq p < \infty$, $r > 0$ und h eine nicht negative messbare Funktion auf $(0, \infty)$. Beweisen Sie:

(a)

$$\int_0^\infty x^{-r-1}\Big(\int_0^x h(y)dy\Big)^p dx \leq \Big(\frac{p}{r}\Big)^p \int_0^\infty x^{p-r-1}h(x)^p dx.$$

(b)

$$\int_0^\infty x^{r-1}\Big(\int_x^\infty h(y)dy\Big)^p dx \leq \Big(\frac{p}{r}\Big)^p \int_0^\infty x^{p+r-1}h(x)^p dx.$$

Aufgabe 3 (Flächeninhalt der Sphäre)**.** Für $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definiert man $\|x\|^2 := \sum_{j=1}^d x_j^2$. Sei σ_d das Oberflächenmaß auf der Sphäre

$$\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $a > 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-a\|x\|^2)dx = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{d/2}.$$

(b) $\sigma_d(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

(c) Ist $B^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$, so ist $\mu(B^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Aufgabe 4 (Ein zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ messbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad V := \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx < \infty.$$

Definieren Sie rekursiv $f_1 := f$, $f_{k+1} := f_k * f$. Definieren Sie außerdem $g_k(x) := \sqrt{k} f_k(\sqrt{k}x)$. Beweisen Sie:

(a) $\int_{\mathbb{R}} g_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\widehat{g_k}(\xi) = \widehat{f_k}(\xi/\sqrt{k})$.

(c) $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\widehat{f}(0) = 1$, $(\widehat{f})'(0) = 0$ und $(\widehat{f})''(0) = -V$.

(d) $\lim_{k\to\infty} \widehat{g_k}(\xi) = \exp(-V\xi^2/2)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

(e) Ist $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, so ist die Fouriertransformation $\widehat{\phi}$ in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(f) Unter der Annahme, dass zusätzlich $f \in L^2(\mathbb{R})$, es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\phi(x)dx = (2\pi V)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2V)\phi(x)dx$$

für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

[1] Vgl. Aufgabe 1, ÜB10.