

Analysis 3, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16



Abgabe in der Vorlesung am 26.01.2016.

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Gute Kerne). Eine Familie von Funktionen $\{K_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}_{\delta>0}$ heißt eine *Familie von guten Kernen*, wenn für alle $\delta > 0$

(i) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)| dx \leq A < \infty.$ (Hier ist A unabhängig von $\delta.$)

(iii) Für jede $\eta > 0$

$$\int_{|x|\geq\eta} |K_\delta(x)| dx \rightarrow 0, \text{ wenn } \delta \rightarrow 0.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R}^d mit $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1.$ Definieren Sie $\Phi_\delta(x) := \delta^{-d} \varphi(x/\delta), \delta > 0.$ Zeigen Sie, dass $\{\Phi_\delta\}_{\delta>0}$ eine Familie von guten Kernen ist.

Aufgabe 2 (Interpolation in L^p -Räume). Seien $p_1, p_2, p_3 \in (1, \infty).$ Zeigen Sie:

(a) Ist $p_1 < p_2 < p_3,$ so ist

$$L^{p_2} \subset L^{p_1} + L^{p_3}.$$

(b) Sei $\theta \in (0, 1).$ Ist $\frac{1}{p_2} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_3},$ so ist

$$\|f\|_{p_2} \leq \|f\|_{p_1}^\theta \|f\|_{p_3}^{1-\theta}.$$

Aufgabe 3 (Minkowski-Ungleichung für Integrale). Seien (X_1, ν_1) und (X_2, ν_2) zwei σ -endliche Maßräume, und sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

(a) Seien $1 \leq p < \infty$ und $f \geq 0.$ Zeigen Sie:

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\nu_2(y) \right)^p d\nu_1(x) \right)^{1/p} \leq \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y)^p d\nu_1(x) \right)^{1/p} d\nu_2(y).$$

(b) Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $f(\cdot, y) \in L^p(\nu_1)$ für fast alle $y.$ Angenommen ist, dass die Funktion $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ in $L^1(\nu_2)$ ist. Beweisen Sie:

(b.1) Die Funktion $f(x, \cdot) \in L^1(\nu_2)$ für fast alle $x.$

(b.2) Die Funktion $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\nu_2(y)$ ist in $L^p(\nu_1).$

(b.3) Es gilt:

$$\left\| \int_{X_2} f(\cdot, y) d\nu_2(y) \right\|_p \leq \int_{X_2} \|f(\cdot, y)\|_p d\nu_2(y).$$

Aufgabe 4 (Integraloperatoren). Seien $p \in [1, \infty]$ und $1/p + 1/q = 1.$ Sei $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x, y)$ für alle $\lambda > 0$ und so dass

$$\int_0^\infty |K(x, 1)| x^{-1/p} dx = C < \infty.$$

Für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ definieren Sie die Operatoren

$$Tf(y) := \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_0^\infty K(x, y) g(y) dy.$$

Beweisen Sie:

(a) Die Funktionen Tf und Sg sind fast überall wohldefiniert.

(b) Es gilt: $\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$ und $\|Sg\|_q \leq C \|g\|_q.$

Seien nun

$$Tf(y) := y^{-1} \int_0^y f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_x^\infty y^{-1} g(y) dy.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $1 < p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$, so ist

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \quad \text{und} \quad \|Sg\|_q \leq q \|g\|_q.$$