Analysis 1, Übungsblatt Nr. 1

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe vor der Vorlesung am 16.10.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)**.** Im Folgenden ist eine Reihe von linearen Gleichungssystemen aufgeführt. Lösen Sie die Systeme der Reihe nach.

(a)

$$\begin{cases} 7x + 2y = 6 \\ -2x - 6y = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x + z = y \\ x = -2 + 2y + z \\ y = 3x \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Entdeckung der Irrationalität)**.** Eine ganze Zahl n heißt *gerade* falls sie von der Form $2m$ für eine ganze Zahl m ist. Eine ganze Zahl n heißt *ungerade* wenn sie von der Form $2m + 1$ für eine ganze Zahl m ist. Sie können benutzen, dass jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade ist.

(a) Seien p eine ganze Zahl und q eine ungerade ganze Zahl, d.h. $q \neq 2n$ für jede ganze Zahl n. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweis

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2.$$

(b) Seien p und q ganze Zahlen mit $q \neq 0$ und nehmen Sie an dass mindestens eine von beiden Zahlen ungerade ist. Zeigen Sie durch Fallunterscheidung

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2.$$

(c) Seien p und q positive ganze Zahlen mit der Eigenschaft, dass für beliebige positive ganze Zahlen p' und q' mit $p' < p$ gilt

$$\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 \neq 2.$$

Zeigen Sie

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2.$$

(d) Zeichnen Sie ein Quadrat mit Seitenlänge $a+b$ und unterteilen Sie jede Seite im Verhältnis $a : b$. Zeichnen Sie das Quadrat mit der Seitenlänge c, das diese Unterteilungspunkte bilden. Zeigen Sie durch elementare Berechnung diverser Flächeninhalte in Ihrer Figur dass $a^2 + b^2 = c^2$.

Bemerkung: Wenn $a = b = 1$ in Aufgabe (d), dann löst c die Gleichung $c^2 = 2$ und man schreibt $c = \sqrt{2}$, offenbar ist c gerade die Länge der Diagonalen eines Einheitsquadrates. Die Aufgabe oben beweist, dass c irrational ist, d.h. nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Sonst gäbe es eine solche Darstellung p/q mit kleinstem p, im Widerspruch zu (c). Dass bereits die einfachsten geometrischen Figuren nicht durch "Aneinanderlegen" von Kopien einer "kleinsten Elementarlänge" zu konstruieren sind hat vermutlich im fünften vorchristlichen Jahrhundert eine der ersten Grundlagenkrisen der Mathematik ausgelöst.

Aufgabe 3 (Ungleichungen)**.** (a) Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert durch $|x| = x$ wenn $x \geq 0$ und $|x| = -x$ wenn $x < 0$. Seien x und y reelle Zahlen. Zeigen Sie

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(b) Seien x und y reelle Zahlen. Zeigen Sie

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(c) Seien $x, y > 0$ mit $xy = 1$. Zeigen Sie

$$x + y \geq 2.$$

Unter welchen Bedingungen gilt Gleichheit? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

(d) Seien $x, y > 0$ mit $x < y$. Zeigen Sie

$$x < \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} < y.$$

(Das ist der einfachste Fall der berühmten harmonischen-geometrischen-arithmetischen-quadratischen Ungleichung.)

Hinweis: $x^2 \geq 0$ für alle reelle Zahlen x.

Aufgabe 4 (Logik)**.** Aus dem Zeitmagazin: *Wenn der Knull nicht gepramelt hat, dann haben entweder das Fipi oder die Gluka geurzt. Wenn der Knull nicht geixt hat, dann hat, falls das Dapi nicht gelüllt hat, die Gluka gepramelt. Wenn der Akro nicht geurzt hat, dann hat das Fipi entweder gepramelt oder gewatzelt. Wenn weder der Knull noch das Dapi geixt haben, dann hat die Gluka geurzt. Wenn das Dapi nicht gewatzelt hat, dann hat, falls der Knull nicht geurzt hat, das Fipi gelüllt. Jeder hat etwas getan, keine zwei taten dasselbe, wer hat was getan?*

(a) Setzen Sie K für Knull, p für den, der gepramelt hat, u.s.w. Formulieren Sie die Aussagen des Textes als formale Aussage unter ausschließlicher Verwendung der so eingeführten Buchstaben und der Symbole $=, \neq, \vee, \wedge$.

(b) Beantworten Sie die Frage in dem obigen Text.

(c) Schreiben Sie Ihren Lösungsweg auf mithilfe formaler Regeln für die unter (a) formulierten Aussagen.