Analysis 1, Präsenzübung 7

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Infima auf $\mathbb{F}$)**.** Es seien $f, g \in \mathbb{F}$, wobei $\mathbb{F}$ die Menge aller Folgen erweiterter positiver reeller Zahlen ist. Zeigen Sie:

(a) $f \leq g \Rightarrow \inf(f) \leq \inf(g)$,

(b) $\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f + g)$,

(c) $\liminf f + \liminf g \leq \liminf(f + g)$.

Können die Ungleichungen auf (b) und (c) strikt sein? Nennen Sie Beispiele dafür.

Aufgabe 2 (Quotienten)**.** Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{X} \setminus \{0, \infty\}$ eine Folge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Nehmen wir an, dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ wobei $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Sei $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n =: L < \infty$. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := a_n^{1/n}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

Aufgabe 3 (Reihen)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$$

Aufgabe 4 (Nesbittsche Ungleichung)**.** Seien $a, b, c > 0$ beliebige positive reelle Zahlen. Zeigen Sie:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$