Analysis 1, Präsenzübung 1

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)**.** Im Folgenden ist eine Reihe von linearen Gleichungssystemen aufgeführt. Lösen Sie die Systeme der Reihe nach.

(a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ y = 24 - 4x \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y = 36 - 9x \\ 3x + y/3 = 12 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 7x + 2y = 16 \\ -21x - 6y = 24 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Körperaxiome)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Leiten Sie die folgenden Behauptungen aus den Körperaxiomen (K1) - (K11) ab:

(a) Das additive inverse Element (K4) und das multiplikative inverse Element (K9) sind eindeutig; (genannt $-a$ bzw. a^{-1})

(b) $((a)^{-1})^{-1} = a$ für $a \neq 0$;

(c) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ für $a, b \neq 0$;

(d) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Aufgabe 3 (Ungleichungen)**.** (a) Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert durch $|x| = x$ wenn $x \geq 0$ und $|x| = -x$ wenn $x < 0$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 5| < x + 1$.

(b) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$. Zeigen Sie
$$\frac{x}{2 + x} < \frac{y}{2 + y}.$$

Aufgabe 4 (Logik)**.** Setzen Sie K für Knull, i für den, der geixt hat, u.s.w. Formulieren Sie die Aussage

“*Wenn der Knull nicht geixt hat, dann hat, falls das Dapi nicht gelüllt hat, die Gluka gepramelt*”

als formale Aussage unter ausschließlicher Verwendung der so eingeführten Buchstaben und der Symbole $=, \neq, \vee, \wedge$.

Körperaxiome für die reellen Zahlen

(K1) Je zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$, ist eindeutig ein Element $a + b$ zugeordnet, das *Summe* von a und b heißt.

(K2) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt das *Assoziativgesetz*
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(K3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$a + 0 = a.$$

(K4) Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = 0$.

(K5) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt das *Kommutativgesetz*
$$a + b = b + a.$$

(K6) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Element $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zugeordnet, das *Produkt* von a und b heißt.

(K7) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt das *Assoziativgesetz*
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(K8) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \cdot 1 = a.$$

(K9) Zu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot x = 1$.

(K10) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt das *Kommutativgesetz*

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(K11) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt das *Distributivgesetz*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$