Analysis 1, Probe-Probeklausur

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1

Formulieren und beweisen Sie den Zwischenwertsatz für beliebige stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(Benutzen Sie die $\epsilon - \delta$ Definition der Stetigkeit.)

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig und injektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu f.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Produktregel:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz/absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Berechnen Sie die Summe mindestens einer der Reihen.

Aufgabe 5

(a) Sei $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ eine konvexe Funktion und seien $x < y < z$ Elemente in $\mathbb{Y}$. Welche Ungleichung können Sie für $f(x), f(y), f(z)$ folgern?

(b) Sei jetzt $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ monoton wachsend und konvex. Definieren Sie für $x \in \mathbb{Y}$

$$f^r(x) := \sup\{a : \forall y \in \mathbb{Y} : f(x + y) \geq f(x) + ay\}$$
$$f^l(x) := \inf\{a : \forall y, z \in \mathbb{Y} : y + z = x \Rightarrow f(y) + az \geq f(x)\}$$

Beweisen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{Y} : f^r(x) \geq f^l(x)$$

(c) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass $f^r(x) > f^l(x)$ möglich ist.

Aufgabe 6

Definieren Sie folgende Potenzreihen auf $\mathbb{Y}$:

$$f_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(3m)!} x^{3m}$$

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(3m+1)!} x^{3m+1}$$

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(3m+2)!} x^{3m+2}$$

(a) Beweisen Sie, dass der Konvergenzradius jeder diesen Reihen unendlich ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen dieser Funktionen und begründen Sie Ihre Rechnung.

(c) Zeigen Sie:

$$f_0(x+y) = f_0(x)f_0(y) + f_1(x)f_1(y) + f_2(x)f_2(y)$$
$$f_1(x+y) = f_1(x)f_0(y) + f_2(x)f_1(y) + f_0(x)f_2(y)$$
$$f_2(x+y) = f_2(x)f_0(y) + f_0(x)f_1(y) + f_1(x)f_2(y)$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Untersummen

$$L_k(f, 0, 1)$$

für die Funktion $f(x) = e^x$ und geben Sie einen Ausdruck für die Untersumme, der kein Summenzeichen mehr enthält.

Aufgabe 8

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Funktionen mit

$$\forall a \in A : g(f(a)) = a.$$

(a) Zeigen Sie: g ist surjektiv und f ist injektiv.

(b) Nennen Sie Beispiele die zeigen, dass g nicht injektiv sein muss und dass f nicht surjektiv sein muss.