Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.13 — Abgabe vor der Vorlesung am 27.01.2014

Aufgabe 57 (Integration)

a) Zeigen Sie, dass für $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ und $f_3(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ die uneigentlichen Integrale $\int\limits_{\pi}^{\infty} f_i(x)dx$, $i \in \{1, 2, 3\}$, existieren.

b) Sei $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{r+x^2}dx, \quad \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int\limits_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx, \quad \int\limits_0^\infty x^n \exp(-x)dx.$$

Aufgabe 58 (Taylorpolynome)

a) Sei $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Berechnen Sie $T_{(f_1,2,1)}$ und $T_{(f_2,2,1)}$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung für $|f_i(x) - T_{(f_i,2,1)}(x)|$ für $i \in \{1, 2\}$ und $x \in [0.9, 1.1]$ an.

b) Sei

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_{(f,2,1)}(x)$ und $T_{(f,n,0)}(x)$.

c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{(f,n,0)}(x)$ zu $f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

Tipp zu c): Berechnen Sie zunächst $f'(x)$.

Aufgabe 59 (Reihen)

a) Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ für $q \leq -1$ divergiert.

b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad a_n = (-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{2}}, \quad a_n = \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3+1},$$
$$a_n = \frac{n^2 + n2^n}{3^n}, \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

c) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ und beweisen Sie die Identität

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + ... = \frac{1}{4}.$$

Tipp zu c): Benutzen Sie eine Partial- bzw. Stammbruchzerlegung der Summanden.

Aufgabe 60 (Reihen)

a) Sei $N_0 \in \mathbb{N}$. Es gelte $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q > 1$ für alle $n > N_0$. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

b) Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

c) Folgern Sie, dass die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ auch die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ impliziert.

d) Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass dann die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tipp zu Aufgabenteil b) und c): Verwenden Sie die Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel.