Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 30.05.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. Zeigen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \pi.$$

Aufgabe 2 (Fouriertransformationen). (a) (Poissonkern) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{1}{1+(x/t)^2} e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0.$$

(b) (Sekans Hyperbolicus) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Für eine invertierbare Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Einträgen in $\mathbb{C}$ ist
$$\phi_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases}$$
die zugehörige Möbiustransformation auf der Riemannschen Sphäre $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie
$$\phi_A \circ \phi_{\tilde{A}} = \phi_{A\tilde{A}}$$
(in der Vorlesung wurden die Fälle in denen ∞ in der Rechnung auftaucht ausgelassen).

Aufgabe 4. Sei f eine in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion mit $f(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(N-1)}(0) = 0$ und $f^{(N)}(0) \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché dass es eine Umgebung U von 0 und ein $\epsilon > 0$ gibt sodass für jedes z mit $0 < |z| < \epsilon$ die Gleichung $f(\zeta) = z$ genau N Lösungen $\zeta \in U$ besitzt.