Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 7 — Abgabe vor der Vorlesung am 10.06.2016

Aufgabe 1

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ und es sei $g \in C^0_b(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine *eindeutige* Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0_b(\overline{\Omega})$ besitzt.

Aufgabe 2

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ und $g \in C^0_b(\partial\Omega)$. Finden Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_* \in \partial\Omega$. Dann heißt x_* *regulär* (bzgl. Ω) wenn eine Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert, so dass

- $w(x_*) = 0$ und $w > 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x_*\}$,
- w ist superharmonisch in Ω, das heißt

  $$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

  für alle Kugeln mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Die Funktion w wird Barriere genannt. Zeigen Sie, dass der Punkt x_* genau dann regulär als Randpunkt von Ω ist, wenn er regulär als Randpunkt von $\Omega \cap B_\rho(x_*)$ ist.

Aufgabe 4

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Zeigen Sie, dass u genau dann subharmonisch ist, wenn die folgende Aussage gilt:
Es sei $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$, $v \in C^2(B_r(z)) \cap C^0(\overline{B_r(z)})$ mit $\Delta v = 0$ in $B_r(z)$ und $u \leq v$ auf $\partial B_r(z)$. Dann ist $u \leq v$ in $\overline{B_r(z)}$.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.