Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr.4 Abgabe vor der Vorlesung am 13.05.2016

Aufgabe 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \sin(x) = 0$$

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Anfangswertproblem mit $(x(0), \dot{x}(0)) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung hat und die Lösung für alle Zeiten existiert.

   Hinweis: Das Problem ist nicht explizit (in Termen von Standardfunktionen) lösbar.

b) Zeigen Sie, dass falls ein $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $x(t_0) = 0$ und $|\dot{x}(t_0)| > 2$, dann gilt $\dot{x}(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

a) Es seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ reellwertige harmonische Funktionen. Zeigen Sie, dass ihr Produkt uv eine harmonische Funktion ist genau dann wenn $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

b) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ eine reellwertige harmonische Funktionen so dass u^2 ebenfalls harmonisch ist. Zeigen Sie, dass u konstant ist. Gilt dies auch für holomorphe Funktionen?

Aufgabe 3

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $n \geq 2$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$K : u \mapsto K[u](x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

welche für $x \neq 0$ definiert ist.

a) Zeigen Sie dass für alle $x \neq 0$, $K[K[u]](x) = u(x)$.

b) Es sei $n = 2$. Zeigen Sie dass $\Delta K[u] = K[|x|^4 \Delta u]$.

Aufgabe 4

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{y} + y = A\sin(t) + B\cos(t) + 2\sin(t + \frac{\pi}{3}) + \sin^3(t), \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{aligned}$$

für $t \in (0, \pi)$. Bestimmen Sie alle (A, B) so dass dieses Problem eine Lösung besitzt.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.