Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Wiederholung

Aufgabe 1

a) Lösen Sie die folgende Wärmeleitungsgleichung auf $(0,\infty)\times(0,\pi)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u &= \sin(x), \\ u(0,x) &= \sin(x) + 3\sin(3x), \\ u(t,0) &= 0 = u(t,\pi). \end{aligned}$$

b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Normalenvektorfeld ν und $u_0 \in C_b(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ nicht-trivial. Zeigen Sie, dass wenn eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ des Anfangsgswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= u^2, \\ \partial_\nu u &= 0 \text{ auf } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

existiert, dann ist $T < \infty$.
Hinweise:

- Zeigen Sie, dass der Mittelwert

  $$m(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx$$

  die Ungleichung

  $$\partial_t m(t) \geq m(t)^2$$

  erfüllt.
- Zeigen Sie, dass nicht-triviale Lösungen der Ungleichung nur für eine endliche Zeit existieren können.

Aufgabe 2

a) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= t^2 - t^2\sin(u(t))^2 \text{ in } \mathbb{R}, \\ u(0) &= \pi. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Problems

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) - 4\frac{d}{dt}u(t) + 5u(t) = e^{2t} \text{ in } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

c) Wir betrachten die gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}u(t) - (2t-1)u(t)^2 = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Skizzieren Sie je eine Lösung mit $u(0) = \frac{1}{2}$ und $u(0) = -2$.

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}u - \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ -36 & -26 \end{pmatrix} u = 0.$$

Hinweis: Hier sind die Koeffizienten für einfache Rechnungen ausgewählt, d.h. Determinante, Spur, Eigenwerte und Koeffizienten der Eigenvektoren sind kleine ganze Zahlen.

Aufgabe 3

a) Es seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Geben Sie die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u - \Delta u &= 0, \\ u(0,\cdot) = f, \partial_t u(0,\cdot) &= g \end{aligned}$$

an.

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Träger von f, g in $B_R(0)$ enthalten sind. Was folgt hieraus für den Träger von $u(t,\cdot)$?

c) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u &= \partial_{xx}^2 u, \\ u(0,x) = e^x, \partial_t u(0,x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definieren Sie was es heißt, dass G die Greensche Funktion des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ist.

b) Es sei nun $\Omega = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Finden Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u + \Delta u + 2\partial_{x_1} u + 2\partial_t u + 8u &= 0, \\ u(0,x) &= g(x). \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $v(t,x) = \exp(at + b\cdot x)u(t,x)$ für geeignete Konstanten $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$.