Analysis 2, Übungsblatt Nr. 12

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 16.07.2015.
Pro Aufgabe sind 10 **Bonuspunkte** erreichbar.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Fourierreihe der periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = |\sin x| \text{ für } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

(a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y \sin(xy) dx dy.$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{4 - x^2y^2}} dx dy.$$

Aufgabe 4. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2 + t, t)$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma F$ für die folgenden Vektorfelder F auf $\mathbb{R}^3$:

(a) $F(x, y, z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$.

(b) $F(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x + z)$.

Hinweis. Versuchen Sie zunächst ein Potential zu finden.

Aufgabe 5. Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1) \cup (0,-1)\}$. Geben Sie ein rotationsfreies Vektorfeld F auf U an, das nicht konservativ ist, und das

$$\int_\gamma F = 0$$

erfüllt mit $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$. Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 6. (a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

(c) Beweisen Sie die Existenzsaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 7. Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine Konstante $c \in (0,1)$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $\|DF(x)\| \leq c$, wobei

$$\|DF(x)\| := \sup_{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| = 1} \|DF(x)(y)\|.$$

Wir definieren auch

$$\|DF\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|DF(x)\|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt
$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|DF\|_\infty \|x - y\|.$$

(b) Die Funktion $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $G(x) := x + F(x)$ ist surjektiv. Hinweis: Fixpunktsatz von Banach.

Aufgabe 8. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und

$$K := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Aufgabe 9. Sei A eine Matrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $u \in \mathbb{R}^d$ mit $\|u\| = 1$, so dass

$$\|Au\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^d : \|v\| = 1} \|Av\|.$$

(b) Sei u wie in (a). Beweisen Sie: Ist u' orthogonal zu u, so ist Au' orthogonal zu Au.
Hinweis: Betrachten Sie $u + \lambda u'$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ im Hinblick auf die Maximalitätseigenschaft von u.

(c) Beweisen Sie: Es gibt zwei orthogonale Matrizen U, V so dass $AU = V\Lambda$ für eine diagonale Matrix Λ.

Aufgabe 10. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ α-Hölder stetig mit $0 < \alpha < 1$, d.h.

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x, y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

Sei $p = 1/\alpha$. Zeigen Sie

$$\|f\|_{V^p} := \sup_{N, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_N \leq 1} \Big(\sum_{n=1}^N |f(t_n) - f(t_{n-1})|^p \Big)^{1/p} < \infty.$$

(b) Zeigen Sie die folgende Umkehrung: Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\|f\|_{V^p} = 1,$$

so existiert eine monotone Abbildung $\phi : [0,1] \to [0,1]$ und eine α-Hölder stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $f = g \circ \phi$, wobei p, α wie im Aufgabenteil (a) sind. Hinweis: Ein ähnliches ϕ wurde in der Vorlesung konstruiert.