Analysis 2, Übungsblatt Nr. 3

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 04.05.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Vollständigkeit)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(a.1) Jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert in X.

(a.2) Für jede Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Kugeln in X mit den Eigenschaften

(i) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, $B_1 \subseteq B_2$ oder $B_2 \subseteq B_1$

(ii) $\forall \epsilon > 0$, es gibt eine Kugel $B \in \mathcal{A}$ mit Radius $< \epsilon$

gilt

$$\bigcap_{B \in \mathcal{A}} B \neq \emptyset.$$

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgabe 2 (Separabilität)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(a.1) X ist separabel.

(a.2) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine (höchstens) abzählbare Teilüberdeckung.

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

Aufgabe 3 (Hilbert-Räume über $\mathbb{R}$)**.** Sei H ein reeller Hilbert-Raum und sei $A \subset H$ eine Teilmenge. Der *Komplementärraum* $A^\perp$ von der Teilmenge $A \subset H$ ist die Menge aller Vektoren, die orthogonal zu A sind:

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp y \text{ für alle } y \in A\}.$$

Zeigen Sie: Der Komplementärraum einer Teilmenge eines Hilbert-Raums ist ein abgeschlossener Untervektorraum.

Aufgabe 4 (Hilbert-Räume über $\mathbb{C}$)**.** Sei H ein komplexer Hilbert-Raum. Wie in der Vorlesung definieren wir das komplexe Skalarprodukt von $x, y \in H$ als

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) + \frac{i}{2}(\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|iy\|^2).$$

Zeigen Sie: Für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$.

(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(c) $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\mu} \langle x, y_2 \rangle$

(d) $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

(e) $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$ und $\|x + iy\| = \|x - iy\|$.

(f) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.