**Mathematisches Institut**
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

## Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 9 — Abgabe in der Vorlesung am 18. Juni 2015

### Aufgabe 33 (3 + 3 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ auf $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ für die folgenden Funktionen $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$.

a) $f(z) := \exp(z^2)$.

b) $f(z) := z^2 + z - 1$.

c) $f(z) := \frac{z+3}{z-3}$.

### Aufgabe 34 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := 3 - |z|$. Zeigen Sie, dass $|f|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ im inneren Punkt $z = 0$ ein Maximum annimmt. Diskutieren Sie, ob das ein Widerspruch zum Maximumsprinzip ist.

### Aufgabe 35 (10 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, sowie holomorph auf $G$. Zeigen Sie: Wenn $|f|$ auf $\partial G$ konstant ist, dann ist $f$ konstant auf $\overline{G}$ oder hat eine Nullstelle in $G$.

### Aufgabe 36 (5 + 5 Punkte)

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $f : D \longrightarrow D$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.

b) $|f'(0)| \leq 1$.

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f_1 : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = z\,f_1(z)$ für alle $z \in D$, für die für alle $0 < r < 1$ gilt: $|f_1(z)| < \frac{1}{r}$ für alle $z \in \overline{D_r(0)}$.