Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 8 — Abgabe in der Vorlesung am 11. Juni 2015

Aufgabe 30 (5 + 5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Beweisen Sie:

a) Für alle $a \in \mathbb{C}$ ist $f^{-1}(a)$ diskret und abgeschlossen in G.

b) Für jede kompakte Menge $K \subset G$ ist $f^{-1}(a) \cap K$ endlich.

Aufgabe 31 (5 + 5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $z \in G$. Die Ordnung (oder Vielfachheit) von f in z ist definiert als

$$o_z(f) := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z) \neq 0 \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $o_z(fg) = o_z(f) + o_z(g)$.

b) $o_z(f+g) \geq \min \{o_z(f), o_z(g)\}$ mit Gleichheit dann, wenn $o_z(f) \neq o_z(g)$.

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- f hat in $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung n.
- Für die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 gilt
$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_n \neq 0.$$
- Es existieren $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset U$ und eine holomorphe Funktion $g : B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 11.06 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 8.06., Di. 9.06. und Mi. 10.06. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de