Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 4 — Abgabe in der Vorlesung am 7. Mai 2015

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Sei $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$, und $\log : \mathbb{C}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\log(z) := \log(|z|) + i \arg(z).$$

Beweisen Sie, dass $\log$ eine Logarithmusfunktion ist und für $z \in B_1(1)$ die Identität

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k$$

gilt.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle möglichen Werte der folgenden Ausdrücke:

$$i^{\frac{1}{i}}, \qquad 2^{-i} \qquad (-1)^{\sqrt{i}}.$$

Aufgabe 15 (5 + 5 Punkte)

Seien $c, d > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) := c \cos(t) + i\, d \sin(t)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_\gamma \overline{z}\, dz$.

b) $\int\limits_\gamma \frac{1}{z}\, dz$. (Hinweis: Benutzen Sie, dass $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{c^2\cos^2(t) + d^2 \sin^2(t)}\, dt = \frac{2\pi}{cd}$ ist.)

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G_1 \cup G_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G_1 bzw. G_2 gelte

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Zeigen Sie: Ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend, so gilt auch

$$\int\limits_\delta f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg δ in $G_1 \cup G_2$.