Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 3 — Abgabe in der Vorlesung am 30. April 2015

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $U := I + i\,J$. Weiter sei $f = u + i\,v$ eine auf U holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\;ds - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\;dt + C$$

für $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ gilt, dh der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig durch den Realteil gegeben.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Seien U wie in Aufgabe 9, u harmonisch auf U und v wie in Aufgabe 9 mit $C = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = u + i\,v$ holomorph ist.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $u(z) := \log|z|$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch ist, es aber keine holomorphe Funktion gibt, deren Realteil u ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jede solche holomorphe Funktion die komplexe Ableitung $\frac{1}{z}$ haben müsste.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Begründen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} \qquad \text{in } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

eine holomorphe Funktion definiert.