Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 2 — Abgabe in der Vorlesung am 23. April 2015

Aufgabe 5 (5 + 5 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u$ und $\operatorname{Im} f = v$. Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die folgende Form haben:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = -r_0 \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \varphi_0).$$

b) Sei $U := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Hauptzweig der k-ten Wurzelfunktion $f_k : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_k(z) := \sqrt[k]{|z|}\, e^{i \frac{\arg(z)}{k}}$. Überprüfen Sie, ob f_k holomorph ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x + iy) = \sqrt{|xy|}$. Zeigen Sie, dass f im Punkt $z_0 = 0$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügt, aber dort nicht komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum das nicht im Widerspruch zur Vorlesung steht.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen der Realteil einer holomorphen Funktion ist, und geben Sie diese holomorphe Funktion gegebenenfalls an.

$$u_1(x,y) := x^3 - y^3 \qquad u_2(x,y) := x^3 - 3\,x\,y^2, \qquad u_3(x,y) := e^x \cos(x), \qquad u_4(x,y) := e^x \cos(y).$$

Aufgabe 8 (5 + 5 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

a) Wir bezeichnen die reelle Jacobi-Matrix von f mit $J_f^{\mathbb{R}}$ und definieren

$$J_f^{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det J_f^{\mathbb{R}} = \det J_f^{\mathbb{C}}$ und für holomorphe f insbesondere $\det J_f^{\mathbb{R}} = |f'|^2$ gilt.

b) Sei f holomorph, f' stetig und $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in U$. Zeigen Sie, dass f eine biholomorphe Abbildung einer Umgebung von z_0 auf eine Umgebung von $f(z_0)$ ist.