Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 5, Abgabe am 20.11.2007

Aufgabe 17

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bezeichne mit W, X, Y, Z die Koordinaten des affinen Raums $\mathbb{A}_k^4$. Sei V die affine Varietät $V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}_k^4$, und sei $U = V \cap (D(Y) \cup D(W))$.

a) Sei $g \in \Gamma(V, \mathscr{O}_V)$ mit $g(u) \neq 0$ für alle $u \in U$. Wir wollen zeigen, dass dann $g(u) \neq 0$ für alle $u \in V$ gilt. Wir liften g zu einem Element von $\Gamma(\mathbb{A}_k^4, \mathscr{O}_{\mathbb{A}_k^4})$, das wir wieder mit g bezeichnen; alle Verschwindungsmengen $V(\cdot)$ beziehen sich auf $\mathbb{A}_k^4$. Wir nehmen nun an, dass $V(g) \cap V \neq \emptyset$ und leiten wie folgt einen Widerspruch her. Sei $E = V(Y, W) \subset \mathbb{A}_k^4$. Folgere aus der obigen Annahme, dass $V(g) \cap V = E$. Sei nun $E' = V(X, Z)$. Zeige, dass $V(g) \cap E' = \{(0,0,0,0)\}$, und begründe, dass das ein Widerspruch ist.

b) Wir definieren $h \in \Gamma(U, \mathscr{O}_V)$ durch

$$h(w, x, y, z) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ z/w, & w \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass sich h nicht in der Form f/g, $f, g \in \Gamma(V, \mathscr{O}_V)$, $g(u) \neq 0$ für alle $u \in U$, schreiben läßt.

Aufgabe 18

Welche der folgenden Morphismen sind flach?

a) $f\colon k[T] \longrightarrow k[X,Y]/XY$, $T \mapsto X$.

b) $f\colon k[T] \longrightarrow k[X,Y]/XY$, $T \mapsto X - Y$.

c) $f\colon k[X,Y]/(Y^2 - X^3) \longrightarrow k[T]$, $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$.

d) $f\colon k[X,Y,Z]/(XY - Z^2) \longrightarrow k[T,U]$, $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto U^2$, $Z \mapsto TU$.

Aufgabe 19

Seien X, Y Schemata. Ein treuflacher Morphismus von X nach Y ist ein surjektiver flacher Morphismus $f\colon X \to Y$.

a) Seien $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$ affin, $f\colon X \to Y$ ein Morphismus und $\varphi\colon A \to B$ der zugehörige Ringhomomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) f ist treuflach.

ii) φ ist flach, und für jeden A-Modul $N \neq 0$ gilt $N \otimes_A B \neq 0$.

iii) Für jede Sequenz

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0 \qquad (*)$$

von A-Moduln gilt: die Sequenz $(*)$ ist genau dann exakt, wenn die durch Tensorieren entstehende Sequenz

$$0 \to N' \otimes_A B \to N \otimes_A B \to N'' \otimes_A B \to 0$$

exakt ist.

(Man sagt dann auch, B sei eine treuflache A-Algebra, oder φ sei treuflach.)

b) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein treuflacher Ringhomomorphismus. Zeige, dass φ injektiv ist.

c) Sei $f\colon X \to S$ ein Morphismus von Schemata, und $S' \to S$ ein treuflacher Morphismus. Bezeichne mit $f'\colon X' := X \times_S S' \to S'$ den Morphismus, der aus f durch Basiswechsel ensteht. Zeige: f ist genau dann flach, wenn f' flach ist.

Bemerkung: Eine analoge Aussage gilt (teils unter milden zusätzlichen Voraussetzungen an $S' \to S$) für eine Vielzahl weiterer Eigenschaften, siehe etwa [EGA IV_2], Prop. 2.7.1.

Aufgabe 20

Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus lokal noetherscher Schemata. Zeige:

a) Ist f injektiv, so gilt $\dim X \leq \dim Y$.

b) Ist f flach und surjektiv, so gilt $\dim X \geq \dim Y$.

c) In Teil b) kann man auf die Flachheitsvoraussetzung nicht verzichten.