Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 4, Abgabe am 13.11.2007

Aufgabe 13

Sei $f\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus, und seien X und Y affin. Zeige, dass f projektiv ist.

Aufgabe 14

Sei k ein Körper.

a) Sei X ein eigentliches k-Schema, und $f\colon \mathbb{A}^1_k \to X$ ein Morphismus. Wir identifizieren $\mathbb{A}^1_k$ mit $D_+(X_0) \subset \mathbb{P}^1_k$. Zeige, dass sich f fortsetzen lässt zu einem Morphismus $\mathbb{P}^1_k \to X$.

b) Seien $\operatorname{char} k \neq 2$, $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, und

$$C = V_+((Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z)) \subset \operatorname{Proj} k[X,Y,Z] \cong \mathbb{P}^2_k.$$

Zeige, dass es für keine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset \mathbb{P}^1_k$ einen nicht-konstanten Morphismus $U \to C$ gibt. (Vergleiche (und benutze) Aufgabe 11 von Blatt 3 aus dem SS 07.)

Aufgabe 15

Sei $f\colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus von Schemata, und seien Y und alle Fasern X_y, $y \in Y$, zusammenhängend.

a) Zeige, dass X zusammenhängend ist, sofern f eigentlich ist.

b) Zeige anhand eines Beispiels, dass die Konklusion aus Teil a) ohne die Voraussetzung an f im allgemeinen nicht richtig ist. (*Hinweis:* Eine Idee wäre diese: Sei k ein Körper. Finde zunächst eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^2_k$, die unter der ersten Projektion bijektiv auf $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ abgebildet wird, und konstruiere daraus ein entsprechendes Beispiel.)

Aufgabe 16

Sei k ein Körper, und sei X ein zusammenhängendes eigentliches k-Schema. Sei R eine k-Algebra, und $f\colon X \to \operatorname{Spec} R$ ein Morphismus. Zeige, dass das Bild von f aus einem einzigen Punkt besteht.