Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 12, Abgabe am 22.1.2008

Aufgabe 45

Seien X, Y noethersche Schemata, sei $f\colon X \to Y$ ein separierter Morphismus von endlichem Typ, und sei $u\colon Y' \to Y$ ein Morphismus. Sei $X' = X \times_Y Y'$ und seien $v\colon X' \to X$, $g\colon X' \to Y'$ die Projektionen.

a) Man hat für alle $i \geq 0$ und quasi-kohärenten $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}$ natürliche Morphismen

$$u^* R^i f_* \mathscr{F} \to R^i g_*(v^* \mathscr{F}).$$

b) Ist u flach, so sind die Morphismen in a) Isomorphismen.

Aufgabe 46

Sei k ein Körper und $X = \mathbb{P}^1_k$.

a) Sei $\mathscr{E}$ ein lokalfreier $\mathscr{O}_X$-Modul von endlichem Rang r. Es gibt ein $d \in \mathbb{Z}$ und einen nicht-trivialen Homomorphismus $\mathscr{O}(d) \to \mathscr{E}$.

b) Ist d in a) maximal, so ist der Quotient $\mathscr{E}/\mathscr{O}(d)$ lokalfrei vom Rang $r-1$. (Ist A ein reduzierter lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, und $r \geq 0$, so dass für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ das Tensorprodukt $M \otimes A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ Dimension r über $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ hat, so ist M frei.)

c) Seien $d < d'$ ganze Zahlen und

$$0 \to \mathscr{O}(d) \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}(d') \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von lokalfreien $\mathscr{O}_X$-Moduln. Zeige: es existiert $d'' > d$ und ein nicht-trivialer Homomorphismus $\mathscr{O}(d'') \to \mathscr{E}$.

d) Sei $\mathscr{E}$ ein lokalfreier $\mathscr{O}_X$-Modul von endlichem Rang r. Zeige, dass ganze Zahlen $n_1, \dots, n_r$ existieren, so dass

$$\mathscr{E} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}(n_i)$$

gilt, und dass die n_i bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung. Vergleiche [1], [2].

Aufgabe 47

Sei A ein Ring, $Y = \operatorname{Spec} A$, $n \geq 1$, $S = A[X_0, \dots, X_n]$, und $X = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^n_A$. Seien $e_0, \dots, e_{n+1}$ die Standard-Basisvektoren (jeweils vom Grad 1) des freien

S-Moduls $S(-1)^{n+1}$. Sei $\alpha\colon S(-1)^{n+1} \to S$ der S-Modulhomomorphismus $e_i \mapsto X_i$. Sei $\beta\colon \mathscr{O}(-1)^{\oplus n+1} \to \mathscr{O}_X$ der von α induzierte Morphismus.

Zeige: $\Omega_{X/Y} \cong \ker\beta$. Was bedeutet das im Fall $n = 1$?

Aufgabe 48

Seien k ein Körper, und $X = \operatorname{Spec} k[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1))$. Zeige anhand verschiedener der in der Vorlesung besprochenen Kriterien, dass der Morphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ nicht glatt ist.

Literatur

[1] Alexandre Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Amer. J. Math. **79** (1957), 121–138.

[2] Winfried Scharlau, Some remarks on Grothendieck's paper *Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann*, http://wwwmath.uni-muenster.de/u/scharlau/scharlau/grothendieck/Grothendieck.pdf