Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 1, Abgabe am 23.10.2007

Aufgabe 1

a) Seien X ein reduziertes und Y ein separiertes Schema, und seien f und g Morphismen $X \longrightarrow Y$, deren Einschränkungen auf eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ übereinstimmen. Zeige, dass dann $f = g$ gilt. *Hinweis:* Die Morphismen f und g induzieren einen Morphismus $h\colon X \longrightarrow Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y$. Begründe, dass $h(X) \subseteq \Delta_{Y/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(Y)$ und wende Teil a) von Aufgabe 49, Blatt 13 zur Algebraischen Geometrie 1, an.

b) Gib jeweils ein Gegenbeispiel zu der obigen Aussage an, wo X reduziert, aber Y nicht separiert, bzw. X nicht reduziert, aber Y separiert ist.

Aufgabe 2

Sei $\mathscr{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata, für die gilt:

i) Jede abgeschlossene Immersion hat die Eigenschaft $\mathscr{P}$.
ii) Die Eigenschaft $\mathscr{P}$ ist stabil unter Komposition.
iii) Die Eigenschaft $\mathscr{P}$ ist stabil unter Basiswechsel.

Zeige, dass dann gilt:

a) Sind $X_1 \longrightarrow Y_1$, $X_2 \longrightarrow Y_2$ Morphismen mit $\mathscr{P}$, so hat auch der induzierte Morphismus $X_1 \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} X_2 \longrightarrow Y_1 \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y_2$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$.

b) Sind $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ Morphismen, hat $g \circ f$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ und ist g separiert, so hat f die Eigenschaft $\mathscr{P}$. (*Hinweis:* Der Graph-Morphismus $\Gamma_f\colon X \longrightarrow X \times_Z Y$ entsteht durch Basiswechsel aus $\Delta_{Y/Z}$.)

c) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus mit $\mathscr{P}$, so hat auch $f_{\mathrm{red}}\colon X_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y_{\mathrm{red}}$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$.

Aufgabe 3

Sei A ein graduierter Ring. Zeige, dass das homogene Spektrum $\operatorname{Proj} A$ separiert ist.

Aufgabe 4

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten $\mathbb{A}_k^2$ mit Koordinaten x, y, $\mathbb{P}_k^1$ mit homogenen Koordinaten $u : v$ und setzen $X = V_+(xu - yv) \subset \mathbb{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1$.

a) Bezeichne $f\colon X \longrightarrow \mathbb{A}_k^2$ die Einschränkung der Projektionsabbildung $\mathbb{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{A}_k^2$ auf X. Die Fasern $f^{-1}(x)$ von f über abgeschlossenen Punkten $x \in A_k^2$ sind abgeschlossene Untervarietäten von X. Zeige, dass für $x \neq (0,0)$ die Faser $f^{-1}(x)$ aus einem Punkt besteht, und dass $f^{-1}((0,0)) \cong \mathbb{P}_k^1$.

c) Bezeichne $g\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ die Einschränkung der Projektionsabbildung $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Zeige, dass alle Fasern von g isomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$ sind.

d) Zeige, dass X nicht isomorph ist zu $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. *Hinweis:* Eine Möglichkeit ist, jeweils den Raum der globalen Schnitte der Strukturgarbe zu bestimmen, d. h. $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}_k^1)$ und $\mathrm{Hom}(\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1)$. Beachte dazu, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1) = k$.

Zusatzaufgabe: Man nennt den Morphismus $f\colon X \longrightarrow \mathbb{A}_k^2$ die *Aufblasung* von $\mathbb{A}_k^2$ im Punkt $(0,0)$. Warum?