Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln
6. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Das Radikal $\sqrt{I}$ von I ist die Menge der $x \in R$ mit der Eigenschaft $x^n \in I$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften.

a) Die Teilmenge $\sqrt{I} \subseteq R$ ist ein Ideal.

b) Es gilt $I \subseteq \sqrt{I}$.

c) Es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

d) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Aufgabe 2.

a) Sei R ein Hauptidealring. Seien $a, b \in R \setminus \{0\}$ und $r \in R \setminus \{0\}$ ein weiteres Element. Zeigen Sie
$$r \cdot ggT(a, b) = ggT(r \cdot a, r \cdot b).$$

b) Beweisen Sie, dass der ggT zweier Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{Q}[X]$ derselbe ist wie ihr ggT in $\mathbb{C}[X]$.

c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = 1$. Zeigen Sie, dass es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^m + b^n \equiv 1 \pmod{a \cdot b}$.

d) Berechnen Sie den ggT der Polynome $2X^3 + 9X^2 + 10X + 3$ und $X^2 - X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ und in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

Aufgabe 3.

Für $d \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ sei $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d};\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ der Ring aus Aufgabe 4 von Blatt 4.

a) Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ mit $d = -1$ heißt der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Größenfunktion N aus Aufgabe 4 von Blatt 4 euklidisch ist.
Hinweis zum Divisionsalgorithmus: Für $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ mit $v \neq 0$ suche man ein Element aus $\mathbb{Z}[i]$, das zum Quotienten $\frac{u}{v} \in \mathbb{C}$ minimalen Abstand hat.

b) Berechnen Sie $ggT(3 + i, 2 + 2i)$ in $\mathbb{Z}[i]$.

c) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gilt
$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$
Zeigen Sie, dass $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ paarweise verschiedene nicht assoziierte Elemente sind, die zwar irreduzibel, aber nicht prim sind. Geben Sie ein Ideal an, welches kein Hauptideal ist.

Aufgabe 4.

Sei $R = \mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + X + 1)$. Zeigen Sie, daß R ein Körper mit vier Elementen ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $\mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + X + 1)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 + X + 1)$ ist.

Abgabe: Montag, 26. November 2007.