Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2007/08**
Dr. E. Viehmann

Gruppen, Ringe, Moduln
5. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie für den Ring $\mathbb{Z}/420\mathbb{Z}$ die Anzahl seiner

a) Nullteiler,

b) Einheiten, (verwenden Sie a))

c) Ideale,

d) Primideale,

e) Maximalideale.

Aufgabe 2.
Sei R ein kommutativer Ring. Seien I, J Ideale in R.

a) Beweisen Sie die Inklusion $I \cdot J \subset I \cap J$. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die obige Inklusion strikt ist, d.h. $I \cdot J \subsetneq I \cap J$.

b) Beweisen Sie, dass $I + J = R$ die Gleichheit $I \cdot J = I \cap J$ impliziert.

Aufgabe 3.
Geben Sie in den Polynomringen $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X, Y]$ Primideale an, welche keine Maximalideale sind. Suchen Sie Ideale in den oben genannten Ringen, die keine Hauptideale sind (mit Begründung).

Aufgabe 4.
Ein Element a eines Rings heißt nilpotent, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a^n = 0$. Sei R ein kommutativer Ring.

a) Berechnen Sie die Einheiten des Potenzreihenrings $R[[X]]$.

b) Zeigen Sie:

$$(R[X])^\times = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_0 \in R^\times \text{ und } a_i \text{ nilpotent für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Abgabe: Montag, 19. November 2007.