Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Produktgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann zyklisch ist, wenn m und n teilerfremd sind. Beweisen Sie damit folgenden Satz. Sind m, n zueinander prime ganze Zahlen und sind $u, v \in \mathbb{Z}$ beliebig, so gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv u \pmod{m}$, $x \equiv v \pmod{n}$.

b) Sei G eine Gruppe. Seien $N_1, \dots, N_k$ Normalteiler von G mit

$$N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k = \{e\}.$$

Setze $H_i = G/N_i$ für $i = 1, \dots, k$. Zeigen Sie, dass G zu einer Untergruppe von $H_1 \times \ldots \times H_k$ isomorph ist.

Aufgabe 2:

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie das regelmäßige n-Eck in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ gebildet von den Punkten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_i = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi i}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi i}{n}) \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Sei D_{2n} die Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2)$ gegeben durch

$$D_{2n} = \{g \in O(2) \mid \text{ für alle } i \in \{1, ..., n\} \text{ existiert ein } j \in \{1, ..., n\} \text{ mit } gx_i = x_j\},$$

d.h. D_{2n} ist die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks. Die Gruppe D_{2n} heißt die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

Zeigen Sie:

a) D_{2n} wird erzeugt von

$$\sigma = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Die von σ erzeugte Untergruppe in D_{2n} ist ein Normalteiler der Ordnung n und die Ordnung von D_{2n} ist $2n$.

c) Sei G eine Gruppe erzeugt von zwei Elementen $a, b \in G$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{ord} a &= n, \\ \operatorname{ord} b &= 2, \\ bab &= a^{n-1}. \end{aligned}$$

Dann ist G isomorph zu D_{2n}.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnung 4 in der Gruppe S_4. Welche davon sind sogar normal in S_4? Zeigen Sie, dass S_4 auflösbar ist.

Aufgabe 4:

Jedes Element $\sigma \in S_n$ läßt sich bis auf Reihenfolge eindeutig als Produkt $\pi_1 \dots \pi_r$ von elementfremden Zykeln schreiben. Sei ℓ_i die Länge von π_i, und seien die π_i so geordnet, daß $\ell_i \geq \ell_{i+1}$ für alle $i < r$. Dann heißt das Tupel $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ der Zykeltyp von σ.

a) Zeigen Sie, daß zwei Elemente σ, σ' aus S_n genau dann konjugiert sind, wenn ihre Zykeltypen übereinstimmen.

b) Bestimmen Sie die Menge der Konjugationsklassen von S_5 und die Anzahl der Elemente jeder Klasse. Überprüfen Sie für dieses Beispiel die Klassengleichung.

Abgabe: Montag, 5. November 2007.