Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann **WS 2007/08**

Gruppen, Ringe, Moduln
13. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei R ein Ring und sei N ein R-Modul.

a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ ein kontravarianter additiver Funktor ist

b) Sei
$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$
eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie, daß
$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N)$$
exakt ist. Ein solcher Funktor heißt linksexakt.

c) Zeigen Sie, daß der Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot, N)$ nicht exakt ist. Geben Sie dazu eine injektive Abbildung $M_1 \to M_2$ und einen Modul N an, für die $\mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N)$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2.

Sei R ein Ring und seien M, N zwei R-Moduln. Sei $\cdots \to C_1 \to C_0 \to M$ eine projektive Auflösung von M. Sei
$$\mathrm{Ext}^i(M, N) = H_{-i}(\mathrm{Hom}(C_\bullet, N)).$$
Hierbei ist $\mathrm{Hom}(C_\bullet, N)$ der Kettenkomplex mit $\mathrm{Hom}(C_i, N)$ im Grad $-i$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der projektiven Auflösung abhängt.

Aufgabe 3.

Sei L ein $\mathbb{Z}$-Modul.

a) Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > 0$. Zeigen Sie, daß $L/mL \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, L)$.

b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(L', L) = 0$ für jedes $i > 1$ und jeden endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul L'.

Aufgabe 4.

Sei $C_0 = \bigoplus_{1 \leq i \leq 4} \mathbb{Z} e_i$, wobei die e_i die Elemente der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnen. Entsprechend sei $C_1 = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 4} \mathbb{Z} e_{ij}$ und $C_2 = \bigoplus_{1 \leq i < j < k \leq 4} \mathbb{Z} e_{ijk}$. Sei $d_1 : C_1 \to C_0$ gegeben durch $e_{ij} \mapsto e_j - e_i$ und $d_2 : C_2 \to C_1$ durch $e_{ijk} \mapsto e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}$.
Zeigen Sie, daß dies einen Kettenkomplex
$$0 \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$$
definiert und berechnen Sie seine Homologie.

Bemerkung: Man kann die Erzeuger von C_0, C_1 und C_2 mit den Ecken, Kanten bzw. Seitenflächen eines Tetraeders identifizieren (wobei man z. B. e_{ij} mit der Kante identifiziert, die die i-te und j-te Ecke enthält). Dann bildet d_2 eine Seitenfläche auf eine Wechselsumme der Kanten am Rand der Fläche ab. Ebenso bildet d_1 eine Seite auf eine Wechselsumme der Ecken an den Endpunkten der Kante ab. Deshalb nennt man die Abbildungen d_i *Randabbildungen*. Die in der Aufgabe berechnete Homologie heißt die simpliziale Homologie des Tetraeders.

Abgabe: Montag, 28. Januar 2008.

Hinweise zur Klausur

Zulassung: Zur Klausur zugelassen ist, wer von Blatt 1 bis 11 insgesamt mindestens die Hälfte der möglichen Punkte erreicht hat. Vor dem Hörsaal hängt eine Liste mit den Matrikelnummern aller zugelassenen Studenten aus.

Zeit und Ort: Die Klausur findet am 2. Februar von 9 Uhr (s.t.) bis 11 Uhr statt. Bitte seien Sie 10 Minuten vor Beginn der Klausur da. Die Klausur wird auf zwei Räume verteilt geschrieben. Studenten, deren Nachname mit A-H beginnt, schreiben die Klausur im kleinen Hörsaal, alle anderen im großen Hörsaal.

Hilfsmittel:

- Mitzubringen sind ein Stift (blau oder schwarz, kein Bleistift), unbeschriebenes, unbedrucktes Papier und der Personalausweis oder ein anderer amtlicher Lichtbildausweis sowie der Studentenausweis.
- Nicht zugelassen sind Hilfsmittel wie Lehrbücher, Vorlesungsmitschriften, Notizen und Taschenrechner sowie Mobiltelefone.

Nachklausur: Für diejenigen, die zur Klausur zugelassen sind, aber diese nicht bestanden haben und für die, die bei der Klausur gefehlt haben, gibt es am 12. April 2008 eine Nachklausur. Genauere Informationen dazu werden kurz vor der Nachklausur auf der Homepage zu finden sein.

Ergebnisse: Wir werden auf dem Klausurblatt abfragen, ob Sie mit der Veröffentlichung Ihres Ergebnisses im Internet einverstanden sind. Diese Zustimmung hat zur Folge, daß wir noch am Klausurwochenende eine Liste auf die Homepage setzen, auf der wir die Matrikelnummern und bestanden/nicht bestanden veröffentlichen (ohne Namen). Stimmt jemand nicht zu, erfährt er sein Ergebnis stattdessen während der Klausureinsicht oder vom Übungsleiter.

Klausureinsicht: Die Klausuren können am 12. Februar im Hausdorffraum, Beringstraße 3, Erdgeschoß, eingesehen werden. Dort können auch die Scheine abgeholt werden. Die Klausureinsicht beginnt zu unterschiedlichen Zeiten, je nach Anfangsbuchstabe des Nachnamens: A-K ab 13:00 Uhr, L-Z ab 13:10 Uhr.