Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Seien A, B und C endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring mit $A \oplus B \cong C \oplus B$. Zeigen Sie, daß $A \cong C$.

Aufgabe 2.

Sei R ein Hauptidealring, $M \cong R^n$ und N ein R-Untermodul von M vom Rang m. Dann besagt der Elementarteilersatz, daß es $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_m$ in R gibt und eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von M, so daß die $a_i v_i$ für $i = 1, \ldots, m$ eine Basis von N bilden. Zeigen Sie, daß $a_1, \ldots, a_m$ durch M und N eindeutig bestimmt sind.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung bewiesene Eindeutigkeitsaussage.

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 10 \\ 2 & 2 & 10 & -10 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{Z}).$$

b) Sei M_1 der Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^3$, der von den Elementen $(0,0,6), (2,0,0)$ und $(0,5,0)$ erzeugt wird. Berechnen Sie $a_1 \mid a_2 \mid a_3 \in \mathbb{Z}$ und eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{Z}^3$, für die die $a_i v_i$ eine Basis von M_1 bilden.

c) Sei M_2 der Untermodul des $\mathbb{R}[X]$-Moduls $\mathbb{R}[X]^2$, der von den Elementen $(X, 1)$ und $(0, X)$ erzeugt wird. Berechnen Sie $a_1 \mid a_2 \in \mathbb{R}[X]$ und eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}[X]^2$, für die die $a_i v_i$ eine Basis von M_2 bilden.

Aufgabe 4.

Sei R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M ein endlich erzeugter R-Untermodul von K^n, so daß K^n als Vektorraum von M erzeugt wird. Zeigen Sie, daß M ein freier R-Modul vom Rang n ist und daß jede Basis von M als R-Modul auch eine Basis von K^n als K-Vektorraum ist.

Abgabe: Montag, 7. Januar 2008.

Ein frohes Weihnachtsfest!