**Prof. Dr. M. Rapoport**
**Dr. E. Viehmann**

**WS 2007/08**

**Gruppen, Ringe, Moduln**

**1. Übungsblatt**

**Aufgabe 1:**

a) Sei $G$ eine Halbgruppe, für welche gilt:

(i) Es existiert ein $e \in G$ mit $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(ii) Für alle $g \in G$ existiert ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} \cdot g = e$.

Zeigen Sie, dass dann $G$ eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie die Kürzungsregeln in einer Gruppe $G$:

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y.$$
$$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y.$$

**Aufgabe 2:**

Entscheiden Sie, welche der folgenden Halbgruppen $G$ eine Gruppe ist (mit Begründung).

(i) $G =$ Menge der positiven ganzen Zahlen, $x \cdot y =$ übliches Produkt der Zahlen $x$ und $y$.

(ii) $G = GL_2(\mathbb{R}) =$ Menge der $2 \times 2$-Matrizen mit nicht verschwindender Determinante, $x \cdot y =$ übliche Matrixmultiplikation.

(iii) $G =$ beliebige Menge mit Multiplikation $x \cdot y = y$.

(iv) Sei $V$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(v_1, v_2)$ eine Basis.
Sei $G$ die Menge der $\mathbb{R}$-Automorphismen $x$ von $V$, die jedes Element der Basis $(v_1, v_2)$ in ein skalares Vielfaches eines Elements dieser Basis überführen und $x \cdot y$ die Verknüpfung. Beschreiben Sie die Menge $G$ auch in Termen von Matrizen.

**Aufgabe 3:**

a) Sei $G$ eine Gruppe, so daß $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ für alle $x, y \in G$. Zeigen Sie: $G$ ist abelsch.

b) Sei $G$ eine Gruppe, in der jedes Element sein eigenes Inverses ist. Zeigen Sie, dass $G$ abelsch ist.

**Aufgabe 4:**

Sei $G$ eine Gruppe mit höchstens 5 Elementen. Zeigen Sie, dass $G$ abelsch ist. Gilt dasselbe für eine Gruppe mit 6 Elementen?

**Hinweis:** Stellen Sie mögliche Gruppentafeln auf.

Abgabe: Montag, 22. Oktober 2007.

**Informationen zum Übungsbetrieb**

**Übungsgruppen.**

| Nummer | Zeit und Ort | Übungsgruppenleiter |
|---|---|---|
| 1 | Mo, 12-14, SR B | Alexander Ivanov |
| 2 | Di, 12-14, SR C | Nicolas Poettering |
| 3 | Mi, 10-12, SR C | Benjamin Mocnik |
| 4 | Do, 12-14, SR C | Stefan Krämer |
| 5 | Fr, 10-12, SR B | Jan Zernisch |

Die Übungsgruppen beginnen in der ersten Semesterwoche, die Gruppe am Montag in der zweiten Woche.

**Übungsaufgaben.** Jeweils montags in der Vorlesungspause liegt ein neues Blatt mit Aufgaben aus, die Sie innerhalb der darauffolgenden Woche bearbeiten und ebenfalls montags in der Vorlesungspause abgeben sollen. Sie dürfen Ihre Lösungen auch zu zweit abgeben, nicht jedoch in größeren Gruppen. Es können nur handschriftliche Lösungen akzeptiert werden. Die Lösungen werden von Ihrem Übungsgruppenleiter korrigiert und in der Übungsgruppe zurückgegeben. Bedingung für die Teilnahme an der Klausur ist, daß Sie mindestens die Hälfte der möglichen Punkte der Übungen erreicht haben.

**Klausur/Scheinkriterien.** Bedingung für den Erwerb des Übungsscheins ist das Bestehen der Klausur am Ende des Semesters. Die Klausur wird am 2. 2. 2008 von 9–11 Uhr stattfinden. Um an der Klausur teilnehmen zu können, brauchen Sie mindestens die Hälfte der möglichen Punkte in den Übungen.

**Homepage.** Unter
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/grm/
finden Sie unter anderem eine Übersicht über die Termine der Übungsgruppen sowie die Aufgabenblätter.