Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 9, Abgabe am 12.06.2007

Aufgabe 33

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, seien $0 < r < n$ ganze Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}$ die Grassmann-Varietät $\mathrm{Grass}_{r,n}(k)$ über k.

a) Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standard-Basis von k^n, und sei $U_0 = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$. Sei P der Stabilisator von U_0 in $GL_n(k)$. Beschreibe P in Termen von Blockmatrizen.

b) Sei $g \in GL_n(k)$. Zeige, dass die Abbildung $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $U \mapsto gU$, ein Morphismus von Prävarietäten ist.

c) Zeige, dass die P-Bahnen in $\mathcal{G}$ gerade die Teilmengen der Form

$$O_i = \{U \in \mathcal{G};\ \dim U \cap U_0 = i\}, \qquad i = r, r-1, \dots, \max(0, r-(n-r))$$

sind.

d) Zeige, dass der Abschluss $\overline{O_i}$ von O_i die Teilmenge

$$\{U \in \mathcal{G};\ \dim U \cap U_0 \geq i\} = \bigcup_{j \geq i} O_j$$

ist. *Hinweis:* Der schwierigere Teil ist zu zeigen, dass jeder Punkt der angegebenen Teilmenge im Abschluss von O_i liegt. Induktiv genügt es, zu zeigen, dass O_{i+1} im Abschluss von O_i liegt. Zeige, dass es wegen der P-Operation ausreicht, zu zeigen, dass irgendein Punkt von O_{i+1} im Abschluss von O_i liegt. Gib eine Familie von $n \times r$-Matrizen mit Einträgen 0, 1 und an einer Stelle t an, die Unterräume in O_i (für $t \in k^\times$) bzw. in O_{i+1} (für $t = 0$) beschreiben.

Aufgabe 34

a) Sei X ein quasi-kompaktes Schema. Zeige, dass X einen abgeschlossenen Punkt besitzt.

b) Sei X ein quasi-kompaktes Schema, das genau einen abgeschlossenen Punkt hat. Zeige, dass X isomorph ist zum Spektrum eines lokalen Ringes.

Aufgabe 35

Zeige:

a) Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ reduziert ist.

b) Ein Schema X ist genau dann integer, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ ein Integritätsring ist.

c) Ist X ein integres Schema, und ist $x \in X$, so ist der Halm $\mathscr{O}_{X,x}$ ein Integritätsring. Gib ein Beispiel eines Schemas an, dessen Halme sämtlich Integritätsringe sind, das aber nicht integer ist.

Aufgabe 36

Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt *quasi-kompakt*, wenn für jede quasi-kompakte offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt ist.

Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, und sei $Y = \bigcup_i V_i$ eine affine offene Überdeckung, so dass für alle i die Menge $f^{-1}(V_i)$ quasi-kompakt ist. Zeige, dass dann f quasi-kompakt ist.