Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 8, Abgabe am 05.06.2007

Aufgabe 29

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}$ die Grassmann-Varietät $\mathrm{Grass}_{2,4}(k)$ über k.

a) Begründe, dass man $\mathcal{G}$ in natürlicher Weise mit der Menge aller Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$ identifizieren kann.

b) Sei $p \in \mathbb{P}^3(k)$, und sei $\Sigma_p \subset \mathcal{G}$ die Menge aller Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$, die p enthalten. Zeige, dass $\Sigma_p \subseteq \mathcal{G}$ eine abgeschlossene Teilmenge ist, und dass das Bild von Σ_p unter der Plücker-Abbildung $f\colon \mathcal{G} \to \mathbb{P}^5(k)$ (aus Aufgabe 25) in einer Ebene von $\mathbb{P}^5(k)$ enthalten ist.

c) Sei nun $H \subset \mathbb{P}^3(k)$ eine Ebene, die p enthält, und sei $\Sigma_H \subset \mathcal{G}$ die Menge aller Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$, die in H enthalten sind. Zeige, dass das Bild von Σ_H in $\mathbb{P}^5(k)$ ebenfalls in einer Ebene enthalten ist.

d) Seien $g \neq g' \in \mathcal{G}$. Zeige: die von $f(g)$ und $f(g')$ in $\mathbb{P}^5(k)$ aufgespannte Gerade $\overline{f(g)f(g')}$ liegt genau dann in $f(\mathcal{G})$, wenn g und g', aufgefasst als Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$, eine Ebene aufspannen.

e) Sei $\Sigma_{p,H} := \Sigma_p \cap \Sigma_H$. Folgere aus dem obigen, dass $f(\Sigma_{p,H})$ eine Gerade ist, und dass $f(\Sigma_p)$ und $f(\Sigma_H)$ Ebenen in $\mathbb{P}^5(k)$ sind.

Aufgabe 30

Sei X ein Schema. Zeige, dass der zugrundeliegende topologische Raum von X ein Kolmogorov-Raum ist, d. h. dass zu je zwei verschiedenen Punkten von X eine offene Teilmenge existiert, die genau einen der Punkte enthält.

Aufgabe 31

Sei X ein Schema. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) X ist zusammenhängend.

ii) Es existiert in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ kein Element $e \neq 0, 1$ mit $e^2 = e$.

iii) Es existiert keine Zerlegung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R_1 \times R_2$ in von Null verschiedene Ringe R_1, R_2.

Aufgabe 32

Sei A ein Ring, und seien $f_1, \ldots, f_n \in A$ mit $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$. Zeige: sind alle Lokalisierungen A_{f_i} noethersch, so ist auch A noethersch.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist dieser: Um zu zeigen, dass ein Ideal $I \subseteq A$ endlich erzeugt ist, finde ein endlich erzeugtes Ideal $J \subseteq I$ mit $JA_{f_i} = IA_{f_i}$ für alle i. Zeige, dass alle Lokalisierungen $(I/J)_{\mathfrak{p}}$ verschwinden ($\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$).