Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 7, Abgabe am 22.05.2007

Aufgabe 25

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $\mathrm{Grass}_{2,4}(k)$ die Grassmann-Varietät der 2-dimensionalen Unterräume in k^4 (vgl. Aufgabe 21). Wir definieren einen Morphismus $f\colon \mathrm{Grass}_{2,4}(k) \to \mathbb{P}^5(k)$ wie folgt: Ist $U \in \mathrm{Grass}_{2,4}(k)$, so wählen wir Basisvektoren, die wir als Spalten einer Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{pmatrix}$$

schreiben. Sei $\mathbf{u}_{i,j}$ der 2×2-Minor zu den Zeilen i, j, d. h. die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} u_{i1} & u_{i2} \\ u_{j1} & u_{j2} \end{pmatrix}$ (wobei $i < j$). Wir setzen dann

$$f(U) := (\mathbf{u}_{12} : \mathbf{u}_{13} : \mathbf{u}_{14} : \mathbf{u}_{23} : \mathbf{u}_{24} : \mathbf{u}_{34}).$$

Zeige, dass die Abbildung f wohldefiniert ist, und dass f ein Morphismus von Prävarietäten ist, der einen Isomorphismus

$$\mathrm{Grass}_{2,4}(k) \xrightarrow{\cong} V_+(X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3)$$

induziert.

Aufgabe 26

a) Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Sei $\mathcal{F}^\dagger$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe. Zeige, dass der Morphismus $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\dagger$ auf den Halmen Isomorphismen $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}^\dagger_x$, $x \in X$, induziert.

b) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y. Sei $f^{-1}\mathcal{F}$ die zu der Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(V)$$

assoziierte Garbe auf X (die *Urbildgarbe* oder das *inverse Bild von $\mathcal{F}$ unter f*). (Wir nehmen hier den induktiven Limes über alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$, die $f(U)$ enthalten.) Zeige, dass für alle $x \in X$ der Halm $(f^{-1}\mathcal{F})_x$ isomorph ist zu $\mathcal{F}_{f(x)}$.

Aufgabe 27

Sei A ein Ring, $f \in A$. Zeige, dass der lokal geringte Raum $(D(f), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A|D(f)})$ isomorph ist zu $\operatorname{Spec} A_f$.

Aufgabe 28

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\operatorname{char} k \neq 2$. Sei

$$R = k[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2), \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

Sei $x \in X$ der dem Primideal $\mathfrak{m} = (X,Y)$ entsprechende Punkt. Bestimme die Primideale des lokalen Rings $\mathscr{O}_{X,x} = R_{\mathfrak{m}}$.

Zeige, dass die *Vervollständigung* $\widehat{R} = k[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^3 - X^2)$ kein Integritätsring ist.