Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 13, Abgabe am 10.07.2007

Aufgabe 49

a) Sei $Z \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, sei X ein reduziertes Schema, und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus mit $f(X) \subseteq Z$. Zeige, dass dann f über Z faktorisiert.

b) Sei X ein Schema, und Z eine abgeschlossene Teilmenge des zugrundeliegenden topologischen Raums. Zeige, dass ein eindeutig bestimmtes reduziertes abgeschlossenes Unterschema von X existiert, dessen zugrundeliegender topologischer Raum Z ist.

Aufgabe 50

Zu einem Schema X bezeichnen wir mit X_{red} das reduzierte abgeschlossene Unterschema mit demselben zugrundeliegenden topologischen Raum wie X.

Zeige: ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, und ist X reduziert, so faktorisiert f über $Y_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y$. Insbesondere induziert jeder Morphismus $X \longrightarrow Y$ einen natürlichen Morphismus $X_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y_{\mathrm{red}}$, so dass die Zuordnung $X \mapsto X_{\mathrm{red}}$ ein Funktor ist.

Aufgabe 51

Sei S ein Schema, und sei $\mathscr{F} \subset \mathcal{O}_S^{n+1}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_S$-Modul vom Rang 1.

Zeige, dass $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ genau dann lokalfrei ist, wenn man S durch offene affine Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ überdecken kann, so dass für den A-Modul $F = \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{F}) \subseteq A^{n+1}$ gilt: F wird von einem Element ${}^t(a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$ erzeugt, und es existiert ein i, für das a_i eine Einheit ist.

Hinweis: Ist F von der angegebenen Form, so kann man leicht einen surjektiven Homomorphismus $A^{n+1} \longrightarrow A^n$ mit Kern F angeben.

Sei andererseits $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ lokalfrei. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist und dass $\mathscr{F}$ und $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ frei sind. Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A^{n+1} \xrightarrow{\beta} A^n \longrightarrow 0$$

mit $\operatorname{im} \alpha = F := \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{F})$. Schreibe $\alpha(1) = {}^t(a_0, \dots, a_n)$.

Begründe, dass ein A-Modulhomomorphismus $\gamma\colon A^n \longrightarrow A^{n+1}$ mit $\beta \circ \gamma = \mathrm{id}_{A^n}$ existiert, und dass man so einen Isomorphismus $A^{n+1} \cong F \oplus \operatorname{im} \gamma$ erhält. Folgere, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ die Abbildung $\alpha \otimes_A A/\mathfrak{m}$ injektiv und folglich das Ideal $(a_0, \ldots, a_n)$ nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Also haben wir eine Überdeckung $\operatorname{Spec} A = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_{a_i}$, und diese hat die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 52

Sei S ein Schema. Zeige, dass man eine in S funktorielle Bijektion

$$\mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(S) = \{\mathscr{F} \subseteq \mathcal{O}_S^{n+1} \text{ lokalfrei vom Rang 1; } \mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F} \text{ lokalfrei}\}$$

hat.

Hinweis: Benutze Aufgabe 51. Ist $\mathscr{F}$ auf S mit den obigen Eigenschaften gegeben, so erhält man lokal auf S Morphismen nach $\mathbb{A}^n \cong U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeige, dass diese Morphismen verkleben. Ist andererseits $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ gegeben, so verklebe die entsprechenden freien $\mathcal{O}_S$-Moduln auf den $f^{-1}(U_i)$.