Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 11, Abgabe am 26.06.2007

Aus diesem Übungsblatt wollen wir uns mit Dimensionstheorie beschäftigen. In der algebraischen Geometrie ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 0.1. *Sei X ein topologischer Raum. Die (Krull-)Dimension* $\dim X$ *von X ist das Supremum über die Längen aller absteigenden Ketten*

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_l$$

irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von X. (Die Länge einer Kette wie oben ist l.)

Die Dimension ist also eine nicht-negative ganze Zahl, oder unendlich. Wir zeigen zuerst einige elementare Eigenschaften dieses Begriffs.

Aufgabe 41

Sei X ein topologischer Raum. Zeige:

a) Für jeden Teilraum $Y \subset X$ gilt $\dim Y \leq \dim X$

b) Sei X irreduzibel und $\dim X$ endlich. Ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X, so gilt $Y = X$ genau dann, wenn $\dim Y = \dim X$.

c) Die Dimension von X ist das Supremum der Dimensionen der irreduziblen Komponenten von X.

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema, so haben wir eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X und Primidealen von A. Die Dimension von X ist dann also das Supremum über alle Längen von Ketten von Primidealen, d. h. die sogenannte Krull-Dimension des Rings A.

Ist K ein Körper, so gilt $\dim \operatorname{Spec} K = 0$. Ist A ein Hauptidealring (aber kein Körper), so ist $\dim \operatorname{Spec} A = 1$. Insbesondere ist also $\dim \mathbb{A}^1_K = 1$ für jeden Körper K. Es gilt, wie man erwarten wird, das folgende Theorem, das wir aus der kommutativen Algebra zitieren (und das nicht ganz leicht zu beweisen ist).

Theorem 0.2. *Sei A ein noetherscher Ring, $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Dann gilt*

$$\dim A[T_1, \dots, T_n] = \dim A + n,$$

mit anderen Worten: $\dim \mathbb{A}^n_A = \dim A + n$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [L], Cor. 2.5.17.

Definition 0.3.

(1) *Ein Ringhomomorphismus* $\varphi\colon A \to B$ *heißt* ganz, *wenn jedes Element von* B *Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in* A *ist.*
(2) *Ein Ringhomomorphismus* $\varphi\colon A \to B$ *heißt* endlich, *wenn* φ *ganz und* B *als* A*-Algebra endlich erzeugt ist.*

Man zeigt:

Lemma 0.4. *Es sei* $\varphi\colon A \to B$ *ein ganzer Ringhomomorphismus und es sei* $f\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ *der zugehörige Morphismus affiner Schemata. Dann gilt* $\dim \operatorname{Spec} B \le \dim \operatorname{Spec} A$. *Ist zusätzlich* φ *injektiv, so ist* f *surjektiv, und es gilt* $\dim \operatorname{Spec} A = \dim \operatorname{Spec} B$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [L], Prop. 2.5.10, oder Bücher über kommutative Algebra.

Aufgabe 42

Ist X ein integres Schema von endlichem Typ über einem Körper K, so ist $\dim X = \operatorname{trdeg}_k K(X)$. *Hinweis.* Benutze den Noetherschen Normalisierungssatz, Theorem 0.2 oben und Lemma 0.4.

Wir zitieren noch den folgenden wichtigen Satz, der letztendlich auf dem Krullschen Hauptidealsatz beruht.

Theorem 0.5. *Seien* K *ein Körper und* X *ein integres* K*-Schema von endlichem Typ, und* $n = \dim X$. *Sei* $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \setminus \{0\}$. *Für* $x \in X$ *schreiben wir* $f(x)$ *für das Bild von* f *im Restklassenkörper* $\kappa(x)$. *Dann haben alle irreduziblen Komponenten der abgeschlossenen Teilmenge* $V(f) := \{x \in X;\ f(x) = 0\}$ *die Dimension* $n - 1$.

Beweis. Siehe [L], Cor. 2.5.26 oder [M] I §7 Thm. 2.

Unter der Höhe $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ eines Primideals $\mathfrak{p}$ in einem Ring A verstehen wir das Supremum über die Längen aller Ketten von Primidealen $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$ in A. Ist also zum Beispiel A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A$.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass sich der Dimensionsbegriff im Falle von integren Schemata von endlichem Typ über einem Körper gut verhält (und dass man im allgemeinen Fall mit gewissen Problemen rechnen muss).

Aufgabe 43

Sei K ein Körper und sei A eine integre endlich erzeugte K-Algebra, und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Zeige:

a) Es gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$. *Hinweis:* Führe Induktion über $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{p}_1$ ein minimales Primideal $\neq 0$, so liefert Theorem 0.5 die Dimension von $A/\mathfrak{p}_1$.

b) Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal, so gilt $\dim A_\mathfrak{p} = \dim A$.

c) Im allgemeinen gilt in einem noetherschen Ring weder a) noch b). (Betrachte zum Beispiel den Ring $A = R[T]$, R ein diskreter Bewertungsring mit uniformisierendem Element π, und $\mathfrak{p} = (1 - \pi T)$.)

Zum Schluss betrachten wir die Grassmannsche $\mathrm{Grass}_{2,4}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 44

Wir benutzen die Bezeichnungen aus Aufgabe 40 und Aufgabe 33. Bestimme die Dimensionen der Orbitabschlüsse $\overline{O_i}$, $i = 2, 1, 0$. Berechne die Dimensionen der Tangentialräume $T_{\overline{O_1},x}$ für alle $x \in \overline{O_1}$. (Wegen der P-Operation muss man die Rechnung nur in zwei Fällen durchführen.)

(Man nennt einen lokalen Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $\kappa = A/\mathfrak{m}$ regulär, wenn $\dim A = \dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Wir sehen also, dass alle Punkte von $\overline{O_1}$ bis auf einen Punkt regulär sind, d. h. einen regulären lokalen Ring besitzen.)

Literatur

[M] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Springer LNM 1358.

[L] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Univ. Press 2002.