Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 10, Abgabe am 19.06.2007

Aufgabe 37

a) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von integren Schemata, der dominant ist, d. h. dass $f(X)$ dicht in Y ist. Zeige, dass f eine Inklusion $K(Y) \longrightarrow K(X)$ der Funktionenkörper induziert.

b) Sei X ein integres Schema, $x \in X$. Zeige, dass der natürliche Morphismus $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ dominant ist, und dass wir so $\mathcal{O}_{X,x}$ auf natürliche Weise als Unterring von $K(X)$ auffassen können. Ist nun $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge, so ist $\eta \in U$ und wir erhalten eine Abbildung $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow K(X)$. Zeige, dass diese Abbildung injektiv ist, und dass gilt:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Aufgabe 38

Gib ein nicht noethersches Schema an, dessen topologischer Raum noethersch ist.

Aufgabe 39

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathcal{G} = \mathrm{Grass}_{2,4}(k)$. Wir benutzen die Bezeichnungen von Aufgabe 33. Beschreibe die Abschlüsse $\overline{O_i}$, $i = 2, 1, 0$, explizit durch Gleichungen, einerseits bezüglich der Überdeckung durch Karten (vgl. Aufgabe 21), andererseits bezüglich der Einbettung in $\mathbb{P}^5(k)$ (vgl. Aufgabe 25).

Aufgabe 40

a) Sei X ein Schema, $x \in X$. Sei ferner $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal des lokalen Rings in x. Dann ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein $\kappa(x)$-Vektorraum, und wir bezeichnen mit $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ seinen Dualraum. Der Raum $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ heißt der *Zariski-Tangentialraum* von X in x und wird auch mit $T_{X,x}$ bezeichnet.

Sei nun k ein Körper, X ein k-Schema und $x \in X$ ein Punkt mit Restklassenkörper $\kappa(x) = k$. Sei $Z := \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Sei $z \in Z$ der einzige Punkt von Z. Sei $\varphi \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten k-Algebrenhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ gibt, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Form $m \mapsto \varepsilon\varphi(m)$ hat. Zeige, dass man so eine Bijektion

$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \longrightarrow \{f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(Z, X);\ f(z) = x\}$$

erhält.

b) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Gib Beispiele von k-Schemata X, Y, Z an, so dass alle drei Schemata denselben zugrundliegenden topologischen Raum wie $\mathbb{A}^1_k$ haben, und so dass

- für alle abgeschlossenen Punkte von X gilt: $\dim T_{X,x} = 1$,
- für alle bis auf einen abgeschlossenen Punkt von Y gilt: $\dim T_{Y,y} = 1$,
- für alle abgeschlossenen Punkte von Z gilt: $\dim T_{Z,z} > 1$,