Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2003/04**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra I

9. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 16.12.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Nach dem Satz über die Bruhatzerlegung läßt sich jede Matrix $A \in GL_n(\mathbb{Q})$ eindeutig in der Form

$$A = UP_\sigma B$$

schreiben, wobei $\sigma \in S_n, U \in \mathcal{U}_\sigma, B \in \mathcal{B}$. Bestimme σ, U und B in den folgenden Fällen:

a)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{Q}) \quad (n \geq 2).$$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $n \geq 2$, und sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in GL_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Zeige: Die im Sinne der Bruhat-Zerlegung zu A gehörige Permutation ist genau dann die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, wenn für alle $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Matrix

$$A_m = (a_{ij})_{\substack{i = n-m+1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m}} \in M_m(K)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 3

Seien K ein Körper und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Betrachte die Menge $R = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2;\ 1 \leq i < j \leq n\}$. Für $\sigma \in S_n$ definiere $R_\sigma = \{(i,j) \in R;\ \sigma(i) < \sigma(j)\}$. Zeige:

a) Für die in der Vorlesung definierte Untergruppe $\mathcal{U}_{\sigma^{-1}}\,(= \mathcal{U} \cap P_{\sigma^{-1}} \mathcal{U}^{-} P_{\sigma})$ von $GL_n(K)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\sigma^{-1}} = \{(a_{ij}) \in GL_n(K);\quad & a_{ii} = 1 \text{ für alle } i, \\ & a_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j \text{ und für alle } (i,j) \in R_\sigma\}. \end{aligned}$$

b) Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\sigma(j) = 1 + \#\{i \in \mathbb{N};\ 1 \leq i < j, (i,j) \in R_\sigma\} + \#\{k \in \mathbb{N};\ j < k \leq n, (j,k) \notin R_\sigma\}.$$

c) Die Abbildung $r\colon S_n \longrightarrow \mathbb{P}(R)$, $\sigma \mapsto R_\sigma$, ist injektiv.

d) Aus $(i,j), (j,k) \in R_\sigma$ folgt $(i,k) \in R_\sigma$.

e) Aus $(i,j), (j,k) \in R$ und $(i,k) \in R_\sigma$ folgt, dass mindestens eines der Paare (i,j) und (j,k) in R_σ liegt.

f) Sei $S \subseteq R$ eine Teilmenge, so dass d) und e) gelten, wenn man dort jeweils R_σ durch S ersetzt. Zeige, dass ein $\sigma \in S_n$ existiert, so dass $S = R_\sigma$ gilt.

(Hier bezeichnet $\#A$ die Anzahl der Elemente der Menge A, und $\mathbb{P}(R)$ die Potenzmenge von R.)

Aufgabe 4

a) Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit gHg^{-1} die Menge $\{ghg^{-1};\ h \in H\}$. Zeige: die Teilmenge $N_G(H) = \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}$ ist eine Untergruppe von G, die H enthält. Sie wird als der Normalisator von H in G bezeichnet.

b) Sei nun K ein Körper, $\mathcal{B} \subseteq GL_n(K)$ die Untergruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen. Zeige: $N_{GL_n(K)}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.