Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

8. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 09.12.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

a) Zeige, dass für alle $i \neq j$ die Elementarmatrix $T_{ij}(1) \in M_n(K)$ nicht zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Zeige, dass die zwei Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ genau dann ähnlich sind, wenn es eine Permutation $\sigma \in S_n$ gibt, so dass $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ für alle i.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Für $1 \leq r, s \leq n$ definiere $(n \times n)$-Matrizen $E_{rs} = (\varepsilon_{ij})$ durch

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } (i,j) \neq (r,s) \\ 1 & \text{für } (i,j) = (r,s). \end{cases}$$

a) Zeige, dass $E_{rs}E_{tu} = \begin{cases} E_{ru} & \text{falls } s = t \\ 0 & \text{falls } s \neq t. \end{cases}$

b) Schreibe für $r \neq s$ die Matrizen E_{rs} und $E_{rr} - E_{ss}$ in der Form $AB - BA$ für $(n \times n)$-Matrizen A und B.

c) Sei $L\colon M_n(K) \longrightarrow K$ eine K-lineare Abbildung, so dass $L(AB) = L(BA)$ für alle $A, B \in M_n(K)$. Zeige, dass es dann ein $c \in K$ gibt, so dass $L(A) = c \cdot \operatorname{Spur}(A)$ für alle $A \in M_n(K)$.

d) Zeige, dass sich die Einheitsmatrix $E_n \in M_n(\mathbb{Q})$ nicht in der Form $AB - BA$ mit $A, B \in M_n(\mathbb{Q})$ darstellen läßt. Zeige anhand eines Beispiels, dass dies für einen beliebigen Körper K im allgemeinen nicht richtig ist.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

a) Stelle $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ für $a \in K \setminus \{0\}$ als Produkt von Elementarmatrizen dar und folgere, dass A in $SL_2(K)$ liegt.

b) Stelle in den folgenden beiden Fällen die Elementarmatrix $T_{ij}(b)$ für $b \in K$ in der Form $ABA^{-1}B^{-1}$ mit $A, B \in SL_n(K)$ dar:

i) $n = 2$, und K hat mindestens 4 Elemente,
ii) $n = 3$, K beliebig.

c) Sei G eine abelsche Gruppe, und sei $\varphi\colon SL_n(K) \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphimus. Zeige: Wenn eine der beiden Voraussetzungen i), ii) aus b) erfüllt ist, so gilt $\varphi(S) = e$ für alle $S \in SL_n(K)$. (Hierbei bezeichne e das neutrale Element von G.)

Aufgabe 4

a) Betrachte die beiden folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} und τ^{-1}.

b) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeige, dass sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Produkt der Transpositionen $\tau_{12}, \dots, \tau_{n-1,n}$ schreiben läßt (dabei können die $\tau_{i,i+1}$ in beliebiger Reihenfolge und auch mehrfach vorkommen), d. h. S_n wird von $\{\tau_{12}, \dots, \tau_{n-1,n}\}$ erzeugt.

c) Bestimme explizit eine Produktdarstellung wie in b) für die Permutationen σ und τ aus a).