Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

7. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 02.12.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechne AB und BA. Bestimme den Rang von A und von B und berechne, wenn möglich, A^{-1} und B^{-1}.

Aufgabe 2

Sei A_n die folgende $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{Q}$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Die Einträge außerhalb der Diagonalen und der beiden Nebendiagonalen sind 0.)

a) Berechne A_4^{-1}.

b) Berechne A_n^{-1}.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, und seien A und B zwei ähnliche $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K. Zeige:

a) A^j ist ähnlich zu B^j für alle $j \in \mathbb{N}$, also auch $\operatorname{Spur} A^j = \operatorname{Spur} B^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

b) Sei $c \in K$ beliebig. Dann ist $A - cE_n$ ähnlich zu $B - cE_n$, insbesondere gilt $\operatorname{rg}(A - cE_n) = \operatorname{rg}(B - cE_n)$.

Jetzt betrachte folgende 3×3-Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeige:

c) A ist nicht ähnlich zu B, und C ist nicht ähnlich zu D.

d) Die Matrizen C und D sind äquivalent.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$ eine Matrix, für die gilt: $AB = BA$ für alle $B \in M_{n\times n}(K)$. Zeige, dass dann A die Form λE_n, $\lambda \in K$, haben muss.

Aufgabe 5 (*Zusatzaufgabe*)

Sei K ein Körper, und seien $\lambda_{ij} \in K$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Betrachte die folgenden $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sei M der K-Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K. Zeige:

a) $V_0 = \{X \in M;\ XN_0 = N_0X\}$ ist ein Untervektorraum der Dimension n von M.

b) Allgemeiner gilt: $V_1 = \{X \in M;\ XN_0 = N_1X\}$ ist ein Untervektorraum der Dimension n von M.