Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

5. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 18.11.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Eine Flagge in einem Vektorraum V ist eine endliche Folge $U_0, U_1, \ldots, U_n$ von Unterräumen von V, so dass für $1 \leq i \leq n$ gilt: $U_{i-1} \subsetneq U_i$. Die Zahl n heißt die Länge der Flagge. Beweise:

a) Ist V nicht endlich erzeugt, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Flagge der Länge n in V.

b) Der Vektorraum V ist genau dann endlich erzeugt von der Dimension n, wenn es in V eine Flagge der Länge n, aber keine Flagge der Länge $n+1$ gibt.

Aufgabe 2

a) Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Seien U_1 und U_2 zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Teilräume. Zeige, dass $\dim U_1 \cap U_2 = n-2$.

b) Zu welchen natürlichen Zahlen n gibt es Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{Q}^{10}$ der Dimension 7, so dass $U_1 \cap U_2$ die Dimension n hat?

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, W ein K-Vektorraum, und seien U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von W. Wir definieren

$$V_1 = (U_1 + U_2) \cap U_3, \quad V_2 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3),$$
$$V_3 = (U_1 \cap U_2) + U_3, \quad V_4 = (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

a) Zeige, dass $V_2 \subseteq V_1$ und $V_3 \subseteq V_4$.

b) Gib ein Beispiel für W, U_1, U_2, U_3 an, in dem $V_1 \neq V_2$ und $V_3 \neq V_4$ gilt.

c) Zeige durch wiederholte Anwendung der Dimensionsformel für Untervektorräume, dass $\dim V_1 - \dim V_2 = \dim V_4 - \dim V_3$.

d) *Zusatzaufgabe:* Ändert sich die Differenz $\dim V_1 - \dim V_2$, wenn man in der Definition von V_1 und V_2 die Rollen von U_1, U_2 und U_3 vertauscht?

Aufgabe 4

Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen, seien V und W Vektorräume über K und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Zeige:

a) Die Abbildung f ist genau dann linear, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

i) $f(av_1 + (1-a)v_2) = af(v_1) + (1-a)f(v_2)$ für alle $a \in K$, $v_1, v_2 \in V$,

ii) $f(0) = 0$.

b) Erfüllt f die Bedingung i) von Teil a), und ist $w \in W$, so erfüllt auch die Abbildung $g\colon V \longrightarrow W$, $v \mapsto f(v) + w$, die Bedingung i).

c) Erfüllt f die Bedingung i), so gibt es eine lineare Abbildung $g : V \longrightarrow W$ und ein $\tilde{w} \in W$ mit $f(v) = g(v) + \tilde{w}$ für alle $v \in V$.