Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

4. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 11.11.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Zeige, dass

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ ist. Ersetze gemäß dem Basisergänzungssatz zwei der Vektoren aus B durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so dass wieder eine Basis vorliegt.

Aufgabe 2

a) Es seien die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{Q}^4$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sei U der von a, b, c, d erzeugte Unterraum. Gib eine Basis von U an.

b) Seien nun

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zwei Unterräume von $\mathbb{Q}^4$. Gib Basen von $W \cap W'$ und $W + W'$ an.

Hinweis: Dimensionsformel für Untervektorräume.

Aufgabe 3

a) Gib ein Beispiel eines Vektorraums V und einer Teilmenge $M \subseteq V$ an, so dass für alle $v, w \in M$ mit $v \neq w$ die Vektoren v und w linear unabhängig sind, M jedoch linear abhängig ist.

b) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge mit $0 \notin M$. Zeige, dass M genau dann linear unabhängig ist, wenn für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \{0\}.$$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $a = (a_1, \ldots, a_n),\ b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$. Zeige: a und b sind genau dann linear unabhängig, wenn $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ für mindestens ein Paar i, j.