Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

3. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 04.11.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$. Zeige:

a) $-(-a) = a$

b) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

c) $(-a)(-b) = ab$

Aufgabe 2

Sei $F = \{0, 1, a, b\}$ eine vierelementige Menge. Zeige, dass es höchstens eine Möglichkeit gibt, auf F die Struktur eines Körpers zu erklären, so dass 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist. Stelle dazu die Verknüpfungstabellen auf.

Hinweis: Beginne mit der Multiplikationstabelle.

Aufgabe 3

a) Auf einer Menge V sei eine assoziative Verknüpfung $\oplus$ mit neutralem Element $e \in V$ definiert, d. h.

i) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ für alle $a, b, c \in V$,
ii) $a \oplus e = e \oplus a = a$ für alle $a \in V$.

Ferner gelte

iii) $a \oplus a = e$ für alle $a \in V$.

Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Definiere eine Verknüpfung $\odot \colon \mathbb{F}_2 \times V \longrightarrow V$ durch

$$0 \odot a = e, \quad 1 \odot a = a \quad \text{für alle } a \in V.$$

Zeige, dass V mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

b) Sei M eine Menge, $V = \mathbb{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. (Man bezeichnet $\mathbb{P}(M)$ als die *Potenzmenge von M*.) Setze $e = \emptyset \in \mathbb{P}(M)$, und für $A, B \in \mathbb{P}(M)$ sei

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeige, dass die Bedingungen i), ii) und iii) von Teil a) erfüllt sind.

Aufgabe 4

Erzeugen die folgenden Vektoren den Vektorraum $\mathbb{Q}^4$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$