Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

13. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 27.01.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 0 \\ 44 & 11 & 4 \\ -12 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Berechne A^{12345}.

Aufgabe 2

a) Seien $f(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^2 - X + 1$ und $g(X) = X^2 + X + 4$ Polynome über $\mathbb{Q}$. Berechne $a(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$, so dass

$$f(X) = a(X)g(X) + r(X).$$

b) Sei $h(X) = X^5 + 2X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 2X + 4$. Zerfällt $h(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ vollständig in Linearfaktoren? Zerfällt $h(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ vollständig in Linearfaktoren?

Aufgabe 3

a) Für welche Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -b & d \\ 1 & -a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar?

b) Für $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ betrachte die folgende Matrix in $M_n(\mathbb{C})$:

$$B_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix und zeige, dass B_n diagonalisierbar ist. (*Hinweis:* Versuche, Eigenvektoren von B_n der Form $\begin{pmatrix} \zeta^{i_1} \\ \vdots \\ \zeta^{i_n} \end{pmatrix}$, $i_j \geq 0$, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \in \mathbb{C}$, zu finden.)

Aufgabe 4

a) Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$. Fasse $M_2(\mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Wann ist die lineare Abbildung

$$L_A\colon M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad B \mapsto AB - BA$$

diagonalisierbar? Wann ist L_A trigonalisierbar?

b) Sei K ein Körper. Zeige (ohne Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton): ist $A \in M_2(K)$ und χ_A das charakteristische Polynom von A, so ist $\chi_A(A) = 0$. (Ist $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, $A \in M_n(K)$, so sei $p(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in M_n(K)$.)