Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

12. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 20.01.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum, so dass $\ell_A(U) \subseteq U$ für alle $A \in W_n$. (Hier bezeichnet $W_n \subseteq GL_n(K)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen, und $\ell_A \colon K^n \longrightarrow K^n$ die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung.)

Zeige, dass U einer der folgenden Unterräume ist:

$$\{0\},\ K^n,\quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n;\ x_1 = \cdots = x_n \right\},\quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n;\ \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Aufgabe 2

Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$, und entscheide, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei g ein diagonalisierbarer Endomorphismus von V. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so dass $g(U) \subseteq U$.

Zeige, dass dann die Einschränkung von g auf U ein diagonalisierbarer Endomorphismus von U ist.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Ein Polynom $f \in K[X]$ über K heißt *irreduzibel*, wenn f nicht konstant ist und wenn gilt: sind $g, h \in K[X]$ mit $f = gh$, so ist $g \in K$ oder $h \in K$.

Bestimme alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad ≤ 4. (Hier bezeichnet $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen.)