Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

10. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 06.01.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Berechne die Determinante von folgenden Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

b)

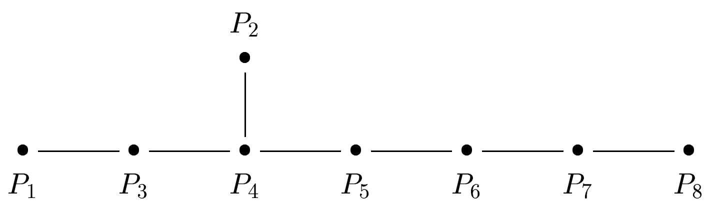
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

c) Sei K ein Körper, und seien $a, b \in K$.

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Aufgabe 2

Betrachte das folgende Diagramm:



Die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_8(\mathbb{Q})$ sei definiert durch

- $a_{ii} = 2$ für alle i,

- $a_{ij} = -1$, wenn in dem Diagramm die Punkte P_i und P_j durch eine Strecke verbunden sind, auf der keine weiteren Punkte liegen,
- $a_{ij} = 0$ sonst.

Zeige: $\det A = 1$.

Aufgabe 3

a) Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

und stelle sie als Quadrat einer Zahl in $\mathbb{Q}$ dar, die von den Variablen a, b, c, d, e und f abhängt.

b) Sei $A \in M_{2n+1}(\mathbb{Q})$ eine schiefsymmetrische Matrix, das heißt ${}^tA = -A$. Zeige: $\det A = 0$.

c) Zeige, dass die Spiegelung an der Nebendiagonalen die Determinante nicht ändert, das heißt (K ein Körper, $a_{ij} \in K$)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Betrachte die folgenden Matrizen in $M_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$F = -E,\ L = -I,\ M = -J,\ N = -K.$$

a) Berechne alle 64 Produkte von je zwei Elementen der Menge $G = \{E, F, I, J, K, L, M, N\}$. Bestimme dabei IJ, JI, I^2 und J^2 durch explizite Matrizenmultiplikation, die übrigen Produkte durch Anwenden der Rechenregeln für Matrizen. Fasse das Ergebnis in Tabellenform zusammen und begründe, warum G eine Gruppe ist.

b) Zeige, dass G nicht zu der achtelementigen Gruppe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

isomorph ist.

c) (*Zusatzaufgabe*) Zeige, dass es keine zu G isomorphe Untergruppe der Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$ gibt.

Ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute für das Jahr 2004!