**Prof. Dr. M. Rapoport**
**Dr. U. Görtz** **WS 2003/04**

**Lineare Algebra I**

**Präsenzaufgaben, Teil 6**

**Aufgabe 5**

Man kann den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ $(i^2 = -1)$ einerseits als eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum, andererseits als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

a) Zeige, dass $\{1, i\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung, die durch $f(x + iy) = ax + by + i(cx + dy)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Zeige: $f$ ist $\mathbb{R}$-linear, und $f$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $a = d$ und $b = -c$.

**Aufgabe 6**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit $f^N$ die $N$-fache Verkettung $f \circ \cdots \circ f$ von $f$ mit sich selbst. Zeige: Es existieren einen natürliche Zahl $N$ und Elemente $a_0, \ldots, a_N \in K$ mit $a_0 \mathrm{id} + a_1 f^1 + \cdots + a_N f^N = 0$.

**Aufgabe 7**

Sei $f$ ein Endomorphismus des Vektorraumes $V$ mit $f^2 = f$. Zeige, dass $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Komplementärräume in $V$ sind.

**Aufgabe 8**

Seien $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen $K$-Vektorräumen. Zeige: Ist $g \circ f$ ein Isomorphismus, so sind $\ker g$ und $\operatorname{im} f$ Komplementärräume in $V$.

**Aufgabe 9**

Seien $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen $K$-Vektorräumen. Zeige:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim W \le \operatorname{rg} g \circ f \le \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

**Aufgabe 10**

Die im folgenden beschriebenen Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sind linear. Bestimme die zu $f$ und $g$ gehörigen Matrizen bezüglich der Standardbasis.

a) Die Abbildung $f$ vertauscht zuerst die $y$- mit der $z$-Koordinate (das entspricht der Spiegelung an der Ebene $\{y = z\}$), projiziert dann in die $x, y$-Ebene und dreht diese Ebene dann um 135 Grad entgegen der Uhrzeigerrichung.

b) Die Abbildung $g$ dreht den Raum um die $z$-Achse um 60 Grad in Uhrzeigerrichtung, skaliert danach entlag der $y$-Achse mit dem Faktor 2 und projiziert dann in die $x, y$-Ebene.

**Aufgabe 11**

Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von endlich-dimensionalen $K$-Vektorräumen. Wir identifizieren $V$ vermöge des in Aufgabe 4 b) angegebenen Isomorphimus mit $V^{**}$ und entsprechend $W$ mit $W^{**}$. Zeige, dass $(f^*)^* = f$.